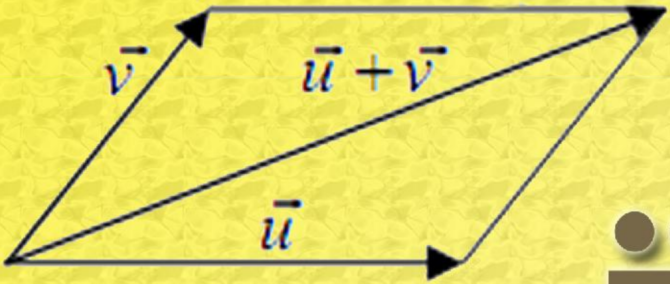
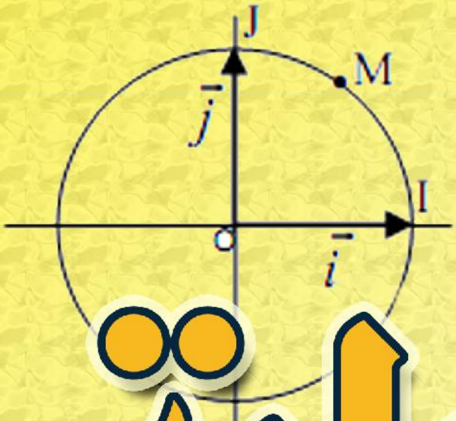


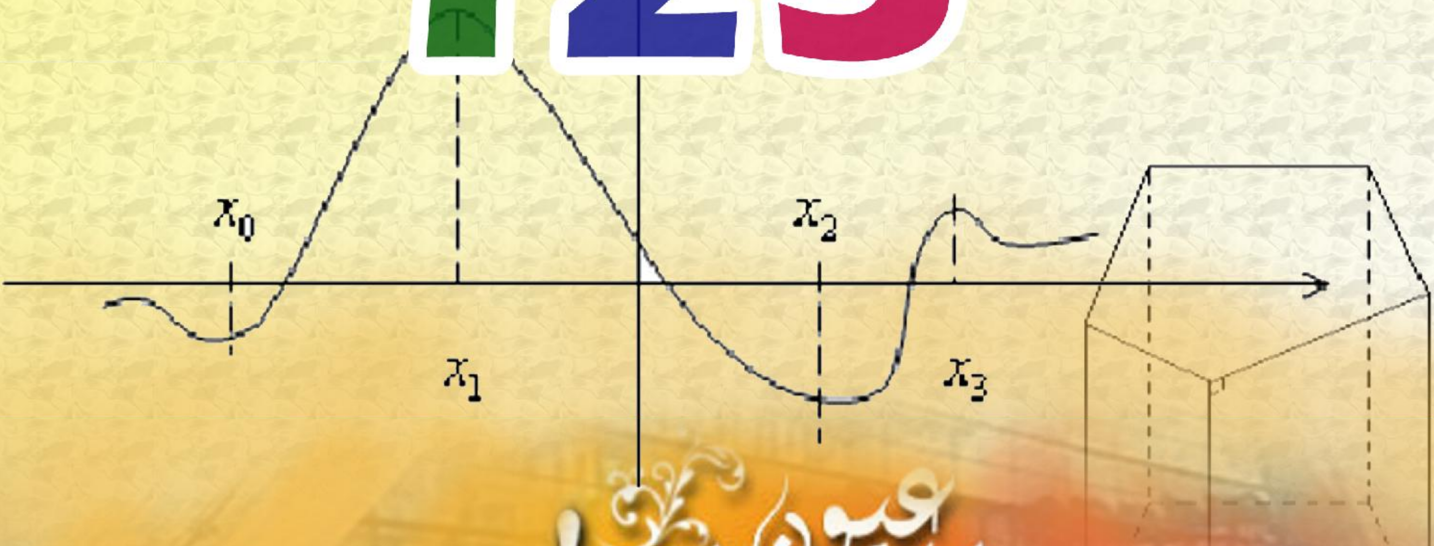
مفكرة



الرياضيات

إعداد الأستاذ: ح. بوعيون.

123



مفكرة الرياضيات *

لطلاب مستوى الطور الثانوي

(الجذع العلمي المشترك)

من إعداد : أ . عبد الحميد بوعيون

~ المغرب العربي الشقيق ~

ج . م . ع	مبــادئ في الحســــابيـــــات ملخــص الـــــــدرس	ح. بـــوعـيـــــون

I) مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية

$$IN = \{0,1,2,3,4,5......\}$$

$$IN^* = \{1,2,3,4,5......\}$$

II) الأعداد الصحيحة الطبيعية الزوجية – الفردية

1) نسمي عدد صحيح طبيعي زوجي كل عدد a يكتب على شكل $a = 2k$ حيث $k \in IN$.

2) نسمي عدد صحيح طبيعي فردي كل عدد a يكتب على شكل $a = 2k+1$ أو $a = 2k-1$ حيث $k \in IN$.

3) ملاحظات

a) يكون عدد زوجيا إذا كان رقم وحداته زوجيا .

b) يكون عدد فرديا إذا كان رقم وحداته فرديا .

c) *) إذا كان a و b زوجيين فإن $a+b$ زوجي .
*) إذا كان a و b فرديين فإن $a+b$ زوجي .
*) إذا كان a زوجيين و b فردي فإن $a+b$ فردي .

d) *) إذا كان a و b زوجيين فإن ab زوجي .
*) إذا كان a و b فرديين فإن ab فردي .
*) إذا كان a زوجيين و b فردي فإن ab زوجي .

e) إذا كان a و b عددين متتابعين فإن أحدهما زوجي والآخر فردي .

III) مضاعفات عدد

1) تعريف ليكن a و b عددين طبيعيين .
نقول إن العدد a مضاعف للعدد b إذا كان a يكتب على شكل $a = bk$ حيث $k \in IN$.

2) ملاحظات

*) 0 مضاعف كل عدد طبيعي .
*) 0 له مضاعف واحد هو 0 .
*) إذا كان a مضاعف b و b مضاعف c فإن a مضاعف للعدد b .

3) المضاعف المشترك الأصغر لعددين

تعريف ليكن a و b عددين طبيعيين غير منعدمين .
المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر مضاعف غير منعدم مشترك بينهما . ونرمز له ب $PPCM(a,b)$ أو $a \vee b$.

4) ملاحظات

*) إذا كان العدد a مضاعف للعدد b فإن $PPCM(a,b) = a$
*) $PPCM(a,a) = a$

IV) قواسم عدد

1) تعريف ليكن a و b عددين طبيعيين .
نقول إن العدد a قابل للقسمة على b ، أو إن العدد b يقسم a إذا كان a مضاعف b يعني a يكتب على شكل $a = bk$ حيث $k \in IN$. ونكتب b/a .

2) ملاحظات

*) كل الأعداد الطبيعية تقسم 0 .
*) 0 يقسم عدد واحد هو 0 .
*) إذا كان b يقسم a و c يقسم b فإن c يقسم a .
*) العدد 1 يقسم جميع الأعداد الطبيعية .
*) كل عدد يقسم نفسه .
*) للعدد 1 قاسم واحد هو 1 .

3) مصادق القسمة على 2-3-4-5-9-11-25

a) ترميز

ليكن α_0 ، α_1 ، α_2 ، α_3 ، …… ، α_r أرقاما من $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
نرمز بالكتابة $\overline{\alpha_r\alpha_{r-1}...\alpha_0}$ إلى العدد الذي رقم وحداته α_0 ، رقم عشراته α_1 ، …………

b) خاصية

نعتبر العدد $a = \overline{\alpha_r\alpha_{r-1}...\alpha_0}$ لدينا:

*) a يقبل القسمة على 2 إذا كان $\alpha_0 \in \{0,2,4,6,8\}$
*) a يقبل القسمة على 3 إذا كان $3/\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$
*) a يقبل القسمة على 4 إذا كان $4/\overline{\alpha_0\alpha_1}$
*) a يقبل القسمة على 5 إذا كان $\alpha_0 \in \{0,5\}$
*) a يقبل القسمة على 9 إذا كان $9/\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$
*) a يقبل القسمة على 3 إذا كان $11 \ / \ (\alpha_0+\alpha_2+\alpha_4+......)-(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+.....)$
*) a يقبل القسمة على 25 إذا كان $\overline{\alpha_1\alpha_0} \in \{\overline{00},\overline{25},\overline{50},\overline{75}\}$

4) القاسم المشترك الأكبر لعددين

تعريف ليكن a و b عددين طبيعيين غير منعدمين .
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو أكبر قاسم غير منعدم مشترك بينهما . ونرمزله ب $PGCD(a,b)$ أو $a \wedge b$.

5) خوارزمية أوقليدس .

ليكن a و b من IN^* بحيث $a \geq b$.
من أجل تحديد $PGCD(a,b)$ ننجز قسمات أقليدية متتالية :
نبدأ بقسمة a على b ثم نقسم في كل مرة المقسوم عليه على الباقي وهكذا حتى نحصل على باقي منعدم وسيكون $PGCD(a,b)$ هو آخر باقي غير منعدم .
ويمكن تلخيص هذه النتائج في جدول كما يلي :

a	b	r_1	r_2	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	q_1	q_2	q_3			
r_1	r_1	r_2	$\cdots$	$\cdots$	r_n	0

V) الأعداد الأولية

1) تعريف نسمي عددا أوليا كل عدد a صحيح طبيعي له قاسمان فقط 1 و a .

2) ملاحظة

a) لكي نتحقق هل العدد a أولي نتبع ما يلي .
نحدد جميع الأعداد الأولية p التي تحقق $p^2 \leq a$
إذا كان أحد هذه الأعداد يقسم a فإن a غير أولي .
إذا كانت جميع هذه الأعداد لا تقسم a فإن a أولي .

b) الأعداد الأولية الأصغر من 100 هي
2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23، 29، 31، 37، 41، 43، 47 ، 53، 59، 61، 67، 71، 73، 79، 83، 89، 97.

c) كل عدد أولي $p \neq 2$ هو فردي

d) العدد 1 ليس أولي .

3) تفكيك عدد إلى جداء عوامل أولية

خاصية : كل عدد طبيعي $a \geq 2$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل $a = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}......p_r^{\alpha_r}$ حيث
p_1 ، p_2 ، p_3 ، ...... ، p_r أعداد أولية .
α_1 ، α_2 ، α_3 ، ...... ، α_r أعددا طبيعية غير منعدمة .
هذه الكتابة تسمى تفكيك العدد a إلى جداء عوامل أولية .

مثال
لنفكك العدد 54: لدينا

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

إذن إذن $54 = 2 \times 3^3$

4) تطبيق .

a) المضاعف المشترك الأصغر لعددين a و b هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة بين تفكيكي a و b مرفوعة إلى أكبر أس .

b) القاسم المشترك الأكبر لعددين a و b هو جداء العوامل الأولية المشتركة بين تفكيكي a و b مرفوعة إلى أصغر أس .

مثال لنحدد: $76 \wedge 632$ و $76 \vee 632$

لدين

$$\begin{array}{r|l} 632 & 2 \\ 316 & 2 \\ 158 & 2 \\ 79 & 79 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 76 & 2 \\ 38 & 2 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

إذن $632 = 2^3.79$ و $76 = 2^2.19$
ومنه $76 \wedge 632 = 2^2 = 4$ و $76 \vee 632 = 2^3.19.79 = 12008$

c) ليكن $a \geq 2$
و $a = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}......p_r^{\alpha_r}$ تفكيك العدد a إلى جداء عوامل أولية .
عدد قواسم العدد a هو $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots\cdots(1+\alpha_r)$

ج م ع	الحساب ـالترتيب في IR ملخص الدرس	ح.بوعيون

الحساب في IR .

1) قواعد الحساب في IR .

ليكن a و b و c و d من IR .

a) $a=b$ يكـــافئ $a+c=b+c$

b) $a=b$ يكـــافئ $a.c=b.c \quad (c\neq 0)$

c) إذا كان $\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases}$ و فـــإن $\begin{cases} a+c=b+d \\ a.c=b.d \end{cases}$ و

d) $ab=0$ يكـــافئ $a=0$ أو $b=0$.

e) $ab\neq 0$ يكـــافئ $a\neq 0$ و $b\neq 0$.

g) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يكـــافئ $a.d=b.c \quad (a\neq 0 \ ,b\neq 0)$

h) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ و $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

i) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ و $\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{bc}$ و $\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$

2) القوى في IR

a) تعريف

*) $a^0=1 \quad (a\neq 0)$ *) $a^1=1$

*) $a^n=\underbrace{a.a.a.....a}_{n\ fois} \quad (n\in IN^*-\{1\})$

*) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

b) خاصيـــات

a) ليكن a و b من IR^* و m و n من $\mathbb{Z}$.

*) $a^m.a^n=a^{m+n}$ *) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

*) $(a^m)^n=a^{mn}$ *) $(ab)^n=a^n b^n$

*) $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ *) $(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}$

b) إذا كان $a=b$ فإن $a^2=b^2$

c) $\boxed{\text{إذا كان } a^2=b^2 \text{ و } a \text{ و } b \text{ لهما نفس الإشارة فإن } a=b .}$

d) $a^2=b^2$ يكـــافئ $a=b$ أو $a=-b$.

ملاحظـــة لكي نبين أن: $a=b$ يكفي مثلا أن نبي أن $a^2=b^2$ و a و b لهما نفس الإشارة

3) متطابقـــات هامة

a) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

b) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

c) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

d) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

e) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

f) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

g) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

4) الجذور المربعة .

تعريف ليكن $a\in IR^+$. الجذر المربع للعدد a هو العدد الموجب b الذي يحقق: $b^2=a$. ونكتب $\sqrt{a}=b$.

خاصيـــات .

a) ليكن a و b من IR^+ .

*) $\sqrt{a}\geq 0$ *) $\boxed{\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2=a}$

*) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ *) $(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}$

*) $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

b) ليكن $x\in IR$. $\boxed{\sqrt{x^2}=|x|}$.

c) إذا كان $ab>0$ فإن: $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$ و $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$

d) ليكن $a\in IR^+$ $\boxed{x^2=a \text{ يكـــافئ } x=\sqrt{a} \text{ أو } x=-\sqrt{a} .}$

5) التنـــــــاسبية .

a) نقول إن العددين a و b متناسبان مع c و d إذا وفقط إذا كان:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

b) إذا كان: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ فإن:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n}$$

6) الجزء الصحيح .

a) تعريف : كل عدد حقيقي x محصور بين عددين نسبيين متتابعين k و $k+1$ يعني: $k\leq x<k+1$ العدد النسبي k يسمى الجزء الصحيح للعدد x ونكتب $E(x)=k$ أو $[x]=k$

ملاحظة:

*) الجزء الصحيح للعدد x هو العدد النسبي الذي يوجد مباشرة قبل x .

*) $E(x)\leq x<E(x)+1$ لكل x من IR .

II) الترتـــــيـــــب في IR .

1) خاصيـــات

a) *) $a\geq b$ يكـــافئ $a-b\geq 0$

*) $a\leq b$ يكـــافئ $a-b\leq 0$

b) *) $a>b$ يكـــافئ $a-b>0$

*) $a<b$ يكـــافئ $a-b<0$

c) *) $a\leq b$ يعني $a<b$ أو $a=b$.

*) إذا كان $a<b$ فإن $a\leq b$ والعكس غير صحيح .

d) *) $a\geq b$ يكـــافئ $a+c\geq b+c$

*) $a>b$ يكـــافئ $a+c>b+c$

e) *) إذا كان $\begin{cases} a\leq b \\ b\leq c \end{cases}$ و فإن $a\leq c$.

*) إذا كان و $\begin{cases} a\le b \\ b<c \end{cases}$ فإن $a<c$.

f) *) إذا كان و $\begin{cases} a\le b \\ c\le d \end{cases}$ فإن $a+c\le b+d$ والعكس غير صحيح .

*) إذا كان و $\begin{cases} a\le b \\ c<d \end{cases}$ فإن $a+c<b+d$

g) *) إذا كان و $\begin{cases} a\le b \\ c\ge 0 \end{cases}$ فإن $ac\le bc$

*) إذا كان و $\begin{cases} a\le b \\ c\le 0 \end{cases}$ فإن $ac\ge bc$.

f) *) إذا كان و $\begin{cases} 0\le a\le b \\ 0\le c\le d \end{cases}$ فإن $ac\le bd$ والعكس غير صحيح .

*) إذا كان و $\begin{cases} 0\le a\le b \\ 0<c<d \end{cases}$ فإن $ac<bd$

i) ليكن $a>0$ و $b>0$. *) $a\le b$ يكـــــافئ $\dfrac{1}{a}\ge\dfrac{1}{b}$

j) ليكن $a<0$ و $b<0$. *) $a\le b$ يكـــــافئ $\dfrac{1}{a}\ge\dfrac{1}{b}$

k) ليكن $a\ge 0$ و $b\ge 0$ *) $a\le b$ يكـــــافئ $a^2\le b^2$

*) $a\le b$ يكـــــافئ $\sqrt{a}\le\sqrt{b}$

l) ليكن $a\le 0$ و $b\le 0$ *) $a\le b$ يكـــــافئ $a^2\ge b^2$

m) ليكن a و b من IR : $|a|\le|b|$ يكـــــافئ $a^2\le b^2$

n) إذا كان لـ a و b نفس الإشارة و $a+b=0$ فإن $a=0$ و $b=0$

ملاحظة

إذا كان العددين a و b يحتويان على الجذور المربعة ، لكي نقارن a و b يكفي مثلا أن نقارن a^2 و b^2 ونتحقق من إشارة a و b ثم نستعمل الخاصيتين k) و l) .

2) القيـــــمة المطلقة .

تعريف :ليكن x من IR . القيمة المطلقة للعدد x هي العدد الذي نرمز له ب $|x|$ والمعرف بما يلي : $|x|=\begin{cases} x & ; & x\ge 0 \\ -x & ; & x\le 0 \end{cases}$

يعني : *) إذا كان $x\ge 0$ فإن القيمة المطلقة للعدد x هي نفسه .

*) إذا كان $x\le 0$ فإن القيمة المطلقة للعدد x هي مقابله .

خاصيـــــات

a) *) $|-x|=|x|$ *) $|x|\ge 0$

*) $|xy|=|x||y|$ *) $|x^n|=|x|^n$ *) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$

b) *) $|x|=r$ يكـــــافئ $x=r$ أو $x=-r$.

*) $|x|=|y|$ يكـــــافئ $x=y$ أو $x=-y$.

c) *) $|x|\le r$ يكـــــافئ $-r\le x\le r$

*) $|x|\ge r$ يكـــــافئ $x\ge r$ أو $x\le -r$

3) المجـــــالات

a) $[a,b]=\{x\in IR \,/\, a\le x\le b\}$

a) $[a,b[=\{x\in IR \,/\, a\le x<b\}$

a) $]a,b]=\{x\in IR \,/\, a<x\le b\}$

a) $]a,b[=\{x\in IR \,/\, a<x<b\}$

a) $[a,+\infty[=\{x\in IR \,/\, x\ge a\}$

a) $]a,+\infty[=\{x\in IR \,/\, x>a\}$

a) $]-\infty,a]=\{x\in IR \,/\, x\le a\}$

a) $]-\infty,a[=\{x\in IR \,/\, x<a\}$

4) التأطيـــــر

تعريف : كل متفاوتة من المتفاوتات : $a<x<b$ و $a\le x<b$ و $a<x\le b$ و $a\le x\le b$ تسمى تأطيرا للعدد x سعته $b-a$.

5) القيمة المقربـــــة .

a) i) إذا أردنا أن نبين أن x_0 قيمة مقربة بتفريط للعدد x بالدقة r ، نقوم بتأطير $x-x_0$ و سنجد $\boxed{0\le x-x_0\le r}$

ii) إذا أردنا أن نبين أن x_0 قيمة مقربة بإفراط للعدد x بالدقة r ، نقوم بتأطير $x-x_0$ و سنجد $\boxed{-r\le x-x_0\le 0}$.

iii) إذا أردنا أن نبين أن x_0 قيمة مقربة للعدد x بالدقة r ، نقوم بتأطير $x-x_0$ و سنجد $\boxed{-r\le x-x_0\le r}$ يعني $\boxed{|x-x_0|\le r}$.

b) إذا أردنا أن نحدد قيمة مقربة للعدد x نقوم بتأطير العدد x و سنجد $\boxed{a\le x\le b}$: ومن هنا نستنتج أن ما يلي :

i) a هي القيمة المقربة بتفريط للعدد x بالدقة $r=b-a$

ii) b هي القيمة المقربة بإفراط للعدد x بالدقة $r=b-a$

iii) $\dfrac{a+b}{2}$ هي القيمة المقربة للعدد x بالدقة $r=\dfrac{b-a}{2}$

c) **ملاحظــــة**

يمكن تحديد قيمة مقربة للعدد x مباشرة إذا كانت لدينا إحدى التأطيرات التالية :

i) $\boxed{0\le x-x_0\le r}$ وستكون x_0 قيمة مقربة بتفريط للعدد x بالدقة r

ii) $\boxed{-r\le x-x_0\le 0}$ وستكون x_0 قيمة مقربة بإفراط للعدد x بالدقة r

iii) $\boxed{-r\le x-x_0\le r}$ أو $\boxed{|x-x_0|\le r}$ وستكون x_0 قيمة مقربة للعدد x بالدقة r

d) التقريب العشري .

ليكن x من IR .

i) العدد العشري $\dfrac{E(10^n x)}{10^n}$ يسمى القيمة العشرية المقربة بتفريط للعدد x بالدقة 10^{-n} .

i) العدد العشري $\dfrac{E(10^n x)}{10^n}+1$ يسمى القيمة العشرية المقربة بإفراط للعدد x بالدقة 10^{-n} .

الثانية ع ت	الأعداد العقدية ملخص الدرس	ح.بوعيون

I) عموميات.

1) a) $\mathbb{C}=\{z=a+ib\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2 ; i^2=-1\}$

b) كل عدد z من $\mathbb{C}$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل $z=a+ib$ حيث $a;b\in\mathbb{R}$ و i عنصر من $\mathbb{C}$ يحقق $i^2=-1$ $(i\notin\mathbb{R})$

c) *) الكتابة $z=a+ib$ تسمى الكتابة الجبرية أو الشكل الجبري للعدد z.

*) العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z ونكتب $R_e(z)=a$

*) العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z ونكتب $\operatorname{Im}(z)=b$

*) إذا كان $b=0$ فإن $z=a\in\mathbb{R}$.

*) إذا كان $a=0$ فإن $z=ib\in\mathbb{R}$ ونقول إن z تخيلي صرف.

2) لكل a و b و a' و b' من $\mathbb{R}$. و $\alpha\in\mathbb{R}$

$\boxed{a+ib=a'+ib' \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}}$ $\boxed{a+ib=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}}$

II) مرافق عدد عقدي.

1) تعريف ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع $a;b\in\mathbb{R}$

نسمي مرافق العدد z العدد الذي نرمز له ب $\bar{z}$ والمعرف بما يلي $\bar{z}=a-ib$.

2) خاصيات.

a) $\boxed{\begin{array}{l}\bar{z}=z \Leftrightarrow z\in\mathbb{R} \\ \bar{z}=-z \Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}\end{array}}$ b) $\boxed{\begin{array}{l}z=z' \Leftrightarrow \bar{z}=\bar{z}' \\ \bar{\bar{z}}=z\end{array}}$

c) $\boxed{\begin{array}{l}\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}' \\ \overline{z_1+z_2+....+z_n}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+....+\bar{z}_n\end{array}}$ d) $\boxed{\begin{array}{l}\overline{z\cdot z'}=\bar{z}\cdot\bar{z}' \\ \overline{z_1z_2....z_n}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\cdot....\bar{z}_n \\ \overline{z^n}=\bar{z}^n\ \ (n\in\mathbb{Z})\end{array}}$

e) $\boxed{\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}} \quad \text{و} \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}}$

f) ليكن $z=x+iy$ لدينا $\boxed{\begin{array}{l}z+\bar{z}=2x=2R_e(z) \\ z-\bar{z}=2iy=2i\operatorname{Im}(z)\end{array} \quad \text{و} \quad z\bar{z}=x^2+y^2}$

III) معيار عدد عقدي

1) **تعريف:** ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع $a;b\in\mathbb{R}$

نسمي معيار العدد z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له ب $|z|$ والمعرف بما يلي: $\boxed{|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}}$

2) **خاصيات:**

a) إذا كان $z=a\in\mathbb{R}$ فإن $|z|=|a|$

إذا كان $z=ib\in\mathbb{R}$ فإن $|z|=|b|$

b) $\boxed{|z|^2=z\bar{z}=a^2+b^2 \quad \text{و} \quad |z|=|\bar{z}|=|-z|}$

c) $\boxed{|z|=0 \Leftrightarrow z=0 \quad \text{و} \quad |z+z'|\le|z|+|z'|}$

d) $\boxed{\begin{array}{l}|zz'|=|z||z'| \\ |z_1z_2....z_n|=|z_1||z_2|....|z_n|\end{array} \quad \text{و} \quad |z^n|=|z|^n}$

e) $\boxed{\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|} \quad \text{و} \quad \left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}}$

ملاحظة: للحصول على الشكل الجبري لعدد عقدي على شكل كسر نتبع ما يلي:

*) $\boxed{\frac{z}{z'}=\frac{z\bar{z}'}{z\bar{z}'}=\frac{z\bar{z}'}{|z'|^2}}$

*) $\boxed{\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}}$

IV) التمثيل الهندسي لعدد عقدي.

نفترض أن المستوى P منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

1) **تعريف:**

a) لكل $M(x,y)$ من P العدد $z=a+ib$ يسمى لحق النقطة M ونكتب $aff(M)$.

b) لكل $\vec{u}(x,y)$ من $\vec{v}$ العدد $z=a+ib$ يسمى لحق المتجهة $\vec{u}$ ونكتب $aff(\vec{u})=z$

c) لكل $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ النقطة $M(x,y)$ تسمى صورة العدد z في P ونكتب $M(z)$.

d) لكل $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ المتجهة $\vec{u}(x,y)$ تسمى صورة العدد z في v_2 ونكتب $\vec{u}(z)$.

ملاحظة: a) $aff(o)=0$. $aff(\vec{e}_1)=1$. $aff(\vec{e}_2)=i$

b) $\boxed{\begin{array}{l}z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow M(z)\in(x'ox) \\ z\in\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow M(z)\in[ox) \\ z\in\mathbb{R}^- \Leftrightarrow M(z)\in(x'o]\end{array}}$

c) $\boxed{\begin{array}{l}z\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow M(z)\in(y'oy) \\ z\in i\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow M(z)\in[oy) \\ z\in i\mathbb{R}^- \Leftrightarrow M(z)\in(y'o]\end{array}}$

2) خاصيات.

a) $\boxed{\begin{array}{l}aff(M)=aff(M')\Leftrightarrow M=M' \\ aff(\overrightarrow{MM'})=aff(M')-aff(M) \\ MM'=|aff(M')-aff(M)|\end{array}}$

b) $\boxed{\begin{array}{l}aff(\vec{u})=aff(\vec{v})\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{v} \\ aff(\vec{u}+\vec{v})=aff(\vec{u})+aff(\vec{v}) \\ aff(\alpha\vec{u})=\alpha aff(\vec{u}) \\ \|\vec{u}\|=|aff(\vec{u})|\end{array}}$

c) ليكن G مرجح $\{(A,\alpha)(B,\beta)\}$ لدينا

$\boxed{aff(G)=\frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha aff(A)+\beta aff(B))}$

d) ليكن I منتصف $[AB]$ $\boxed{aff(I)=\frac{1}{2}(aff(A)+aff(B))}$

e) لتكن A و B و C ثلاث نقط ألحاقها على التوالي z_A, z_B, z_c

بحيث $A\neq B$ تكون النقط A و B و C مستقيمة إذا وفقط إذا كان

$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$.

V) الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم.

1) *) ليكن $z \in \mathbb{C}^*$ و $M(z)$ نسمي عمدة العدد z كل قياس للزاوية $\left(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}\right)$. ونرمز له $\arg z$

*) $\boxed{\arg z \equiv \left(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}\right) \; [2\pi]}$

ملاحظة:

$$z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv 0[2\pi]$$
$$z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi[2\pi]$$
$$z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z = k\pi$$

$$z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2}+k\pi$$

2) كل عدد z من $\mathbb{C}^*$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $|z| = r$ و $\arg z \equiv \theta[2\pi]$ وهذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي للعدد z ونكتب $z = [r,\theta]$ أو $z = re^{i\theta}$.

3) ملاحظة: a) $[r,\theta] = [r',\theta'] \Leftrightarrow r = r'$ و $\theta \equiv \theta'[2\pi]$

b) للحصول على الشكل المثلثي للعدد $z = a+ib$ نتبع ما يلي

$$z = a+ib = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta + i\sin\theta) = \left[\sqrt{a^2+b^2}, \theta\right]$$

c)

$$\cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$$
$$-\cos\alpha + i\sin\alpha = \cos(\pi-\alpha) + i\sin(\pi-\alpha)$$
$$-\cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(\pi+\alpha) + i\sin(\pi+\alpha)$$
$$\sin\alpha + i\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

4)

$$[r,\theta]\cdot[r',\theta'] = [rr', \theta+\theta']$$
$$[r,\theta]^n = [r^n, n\theta]$$
$$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta-\theta'\right]$$
$$\frac{1}{[r,\theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$$
$$\overline{[r,\theta]} = [r,-\theta]$$

$$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'[2\pi]$$
$$\arg z^n \equiv n\arg z[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z[2\pi]$$
$$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z[2\pi]$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \qquad e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$
$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

ملاحظة $-1 = e^{i\pi}$ $\quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

5)

$$\left(\vec{e}_1, \vec{u}\right) \equiv \arg\left(aff(\vec{u})\right)[2\pi]$$
$$\left(\vec{u}, \vec{v}\right) \equiv \arg\left(aff(\vec{v})\right) - \arg\left(aff(\vec{u})\right)[2\pi]$$

$$\left(\vec{e}_1, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$$
$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

ملاحظة:

إذاكان $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1,\theta]$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \Rightarrow AC = AB$$
$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[2\pi]$$

6) صيغة Moivre

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

7) صيغتا Euler

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \qquad e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$$
$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \qquad e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$$

ملاحظة: للحصول على الشكل المثلثي لمجموع عددين لهما نفس المعيار هناك طريقتان

الطريقة 1 . نستعمل الصيغ المثلثية .

ليكن $z_1 = e^{i\alpha}$ $z_2 = e^{i\beta}$

$$z_1 + z_2 = e^{i\alpha} + e^{i\beta} = \cos\alpha + i\sin\alpha + \cos\beta + i\sin\beta$$
$$= \cos\alpha + \cos\beta + i(\sin\alpha + \sin\beta)$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + i\,2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$z_1 - z_2 = \cos\alpha - \cos\beta + i(\sin\alpha - \sin\beta)$$
$$= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + i\,2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

الطريقة 2 . نستعمل الترميز الأسي .

$$z_1 + z_2 = e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$$
$$= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\,2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$z_1 - z_2 = e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$$
$$= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\,2i\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

VI) الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم.

1) ليكن $z \in \mathbb{C}^*$ و $n \in \mathbb{N}^*$ نسمي جذر نوني للعدد z كل عدد عقدي z يحقق $z^n = Z$.

2) حلول المعادلة $z^n = a$ هي الجذور النونية للعدد a .

3) ليكن $Z = [r,\theta]$ من $\mathbb{C}^*$ الجذور النونية للعدد Z هي الأعداد $z_k = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right] / k \in \{0,1,....,n-1\}$ وعددها n

4) الجذور النونية للعدد 1 هي الأعداد $w_k = \left[1, \frac{2k\pi}{n}\right]$ حيث $k \in \{0,1,...,n-1\}$

5) الجذور المربعة لعدد من $\mathbb{C}^*$

a) الطريقة المثلثية:

ليكن $Z=[r,\theta]$ من $\mathbb{C}^*$

لنحدد الجذرين المربعين ل Z. $Z=[r,\theta]=\left[\sqrt{r},\frac{\theta}{2}\right]^2$

إذن جذري Z هما: $u=\left[\sqrt{r},\frac{\theta}{2}\right]$ و $-u$

b) الطريقة الجبرية:

1) إذا كان $\boxed{Z=a\in\mathbb{R}_+^*}$

لدينا: $Z=a=\left(\sqrt{a}\right)^2$

إذن جذري Z هما $u=\sqrt{a}$ و $-u$

2) إذا كان $\boxed{Z=-a\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)}$

$$Z=-a=i^2\left(\sqrt{a}\right)^2=\left(i\sqrt{a}\right)^2$$

إذن جذري Z هما $u=i\sqrt{a}$ و $-u$

3- إذا كان $\boxed{Z=ib\left(b\in\mathbb{R}_+^*\right)}$

$$Z=ib=2i.\frac{b}{2}=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2(1+i)^2=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)\right)^2$$

إذن جذري Z هما $u=\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)$ و $-u$

4) إذا كان $\boxed{Z=-ib\left(b\in\mathbb{R}_+^*\right)}$

$$Z=-ib=-2i.\frac{b}{2}=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2(1-i)^2=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(1-i)\right)^2$$

إذن جذري Z هما $u=\sqrt{\frac{b}{2}}(1-i)$ و $-u$

5) إذا كان $\boxed{Z=a+ib}$ مع $(b\neq 0$ و $a\neq 0)$

مثال:

لنحدد الجذرين المربعين للعدد:

$$Z=-3+4i$$

نضع $z=x+iy$ لدينا $z^2=x^2-y^2+2ixy$

و $|z|^2=x^2+y^2$ و $|Z|=5$

$$z^2=Z \Leftrightarrow \begin{cases} z^2=Z \\ |z|^2=|Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-3 & (1) \\ 2xy=4 & (2) \\ x^2+y^2=5 & (3) \end{cases}$$

من (1) + (3) نستنتج أن $2x^2=2$ يعني $x=1$ أو $x=-1$

ومن (3) − (1) نستنتج أن $2y^2=8$

يعني $y^2=4$

أي $y=2$ أو $y=-2$

ومن خلال (2) لدينا $xy=2\rangle 0$ إذن x و y لهما نفس الإشارة

إذن $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

إذن جذري Z هما $u=1+2i$ و $-u$

VII) المعادلات من الدرجة II:

خاصية:

نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0$ مع $a\neq 0$

نضع $\Delta=b^2-4ac$

1- إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا: $z=-\frac{b}{2a}$.

2- إذا كان $\Delta\neq 0$ فإن Δ يقبل جذرين مربعين u و $-u$

يكون للمعادلة حلان: $z=\frac{-b+u}{2a}$ و $z=\frac{-b-u}{2a}$.

ملاحظات:

*) نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0$ مع $a\neq 0$

إذا كان z_1 و z_2 حلي المعادلة فإن:

$$\begin{cases} z_1+z_2=\frac{-b}{a} \\ z_1z_2=\frac{c}{a} \end{cases}$$

*) نعتبر المعادلة $az^2+2b'z+c=0$ مع $a\neq 0$

من أجل حل المعادلة نستعمل المميز المختصر

$$\Delta'=b'-ac$$

1- إذا كان $\boxed{\Delta'=0}$ المعادلة لها حل وحيد $z=-\frac{b'}{a}$

2- إذا كان $\boxed{\Delta'\neq 0}$ المعادلة لها حلان:

$z_1=\frac{-b'+u}{2a}$ و $z_2=\frac{-b'-u}{2a}$. حيث u جذر مربع Δ'.

الأولى ع ت	المنطق ملخص الدرس	ح.بوعيون

I) العبارة – الدالة العبارية

1) نسمي عبارة كل جملة مفيدة ويمكن الحكم على المعنى الذي تحمله بالصحة أو الخطأ.

2) نسمي دالة عبارية كل نص يحتوي على متغير x من مجموعة E ويصبح عبارة كلما عوضنا x بعنصر محدد من E.

II) المكممات

لتكن $A(x)$ دالة عبارية معرفة على مجموعة E.

1) العبارة: $(\exists x\in E): A(x)$ تقرأ " يوجد على الأقل x من E بحيث $A(x)$ " وتعني يوجد على الأقل عنصر x من E يحقق $A(x)$.
الرمز $\exists$ يسمى المكمم الوجودي.

2) العبارة $(\forall x\in E): A(x)$ تقرأ " مهما كان x من E لدينا $A(x)$ ".
وتعني أن جميع عناصر E تحقق $A(x)$.
الرمز $\forall$ يسمى المكمم الكوني.

III) العمليات المنطقية.

1) النفي

a) نفي العبارة A هي العبارة التي نرمز لها ب $\neg A$ والتي تكون صحيحة إذا كانت A خاطئة وتكون خاطئة إذا كانت A صحيحة.

ملاحظة: " $\neg A$ هي عكس العبارة A "

b) نفي العبارة " $(\forall x\in E): A(x)$ " هي العبارة " $(\exists x\in E): \neg A(x)$ ".

c) نفي العبارة " $(\exists x\in E): A(x)$ " هي العبارة " $(\forall x\in E): \neg A(x)$ ".

2) العطف

عطف العبارتين A و B هي العبارة التي نرمز لها ب (A و B) والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت A صحيحة و B صحيحة .

3) الفصل

فصل العبارتين A و B هي العبارة التي نرمز لها ب (A أو B) والتي تكون صحيحة إذا كانت إحدى العبارتين على الأقل صحيحة.

4) الإستلزام

استلزام العبارتين A و B هي العبارة التي نرمز لها ب $(A\Rightarrow B)$ والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت A صحيحة و B خاطئة.
(وتقرأ A تستلزم B).

5) التكافؤ

تكافؤ العبارتين A و B هي العبارة التي نرمز لها ب $(A\Leftrightarrow B)$ والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت لـ A و B نفس قيمة الحقيقة.
(وتقرأ A تكافئ B).

IV) القوانين المنطقية.

1) تعريف:

نسمي قانونا منطقيا كل عبارة مكونة من عدة عبارات مرتبطة بالروابط المنطقية وتكون صحيحة مهما كانت قيمة حقيقة هذه العبارات.

2) جرد لأهم القوانين المنطقية.

(1) $\neg(\neg A)\Leftrightarrow A$ (2) $(A\Rightarrow B)\Leftrightarrow(\neg A \; ou \; B)$

(3) $(A\Leftrightarrow B)\Leftrightarrow(\neg A\Leftrightarrow \neg B)$

(4 $(A\Leftrightarrow B)\Leftrightarrow(A\Rightarrow B \; et \; B\Rightarrow A)$

(5) $(A \; et \; B)\Leftrightarrow(B \; et \; A)$

(6) $(A \; ou \; B)\Leftrightarrow(B \; ou \; A)$

(7) $\left[(A \; et \; B) \; et \; C\right]\Leftrightarrow\left[A \; et \; (B \; et \; C)\right]$

(8) $\left[A \; ou \; (B \; ou \; C)\right]\Leftrightarrow\left[(A \; ou \; B) \; ou \; C\right]$

(9) $\left[A\Rightarrow B \; et \; B\Rightarrow C\right]\Rightarrow(A\Rightarrow C)$

(10) <u>قانون التكافؤات المتتالية</u>

$$(A\Leftrightarrow B \; et \; B\Leftrightarrow C)\Rightarrow A\Leftrightarrow C$$

(11) $\left[A \; et \; (B \; ou \; C)\right]\Leftrightarrow\left[(A \; et \; B) \; ou \; (A \; et \; C)\right]$

(12) $\left[A \; ou \; (B \; et \; C)\right]\Leftrightarrow\left[(A \; ou \; B) \; et \; (A \; ou \; C)\right]$

(13) <u>قانوني موركان.</u>

$\neg(A \; et \; B)\Leftrightarrow(\neg A \; ou \; \neg B)$ (*)

$\neg(A \; ou \; B)\Leftrightarrow(\neg A \; et \; \neg B)$ (*)

(15) <u>قانون الاستلزام المضاد للعكس</u>

$$(A\Rightarrow B)\Leftrightarrow(\neg B\Rightarrow \neg A)$$

$\neg(A\Rightarrow B)\Leftrightarrow(\neg A \; et \; \neg B)$ (16)

(17) <u>قانون الخلف</u>

$$((\neg A\Rightarrow \neg B) \; et \; B)\Rightarrow A$$

(18) <u>قانون فصل الحالات</u>

$$(A\Rightarrow C \; et \; B\Rightarrow C)\Rightarrow\left[(A \; ou \; B)\Rightarrow C\right]$$

V) بعض الاستدلالات.

1) الاستدلال بالتكافؤات المتتالية:

لكي نبين أن العبارة A صحيحة يكفي أن نبين أن $A\Leftrightarrow B$ و B صحيحة.

2) الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس:

لكي نبين أن $A\Rightarrow B$ يكفي أن نبين أن $\neg B\Rightarrow \neg A$.

3) الاستدلال بالخلف:

لكي نبين أن العبارة A صحيحة نفترض العكس ونصل إلى تناقض مع المعطيات.

4) الاستدلال بفصل الحالات:

لتكن $E=E_1\cup E_2$ لكي نبين أن $(\forall x\in E): A(x)$ يكفي أن نبين ما يلي: *) إذا كان $x\in E_1$ فإن $A(x)$ صحيحة.
*) إذا كان $x\in E_2$ فإن $A(x)$ صحيحة.

5) الاستدلال بالترجع:

لكي نبين أن العبارة $P(n)$ صحيحة لكل عدد طبيعي $n\geq n_0$ نبين ما يلي:

*) نبين أن العبارة صحيحة من أجل $n=n_0$

*) نفترض العبارة P صحيحة من أجل n .

*) نبين أن العبارة P صحيحة من أجل $n+1$.

ج م ع	الحدوديات - النظمات المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية	ح.بوعيون

I) الحدوديات

1) تعريف

ليكن x من $\mathbb{R}$ نعتبر التعبير

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1x+a_0$$

حيث $a_n,....,a_1,a_0$ أعداد حقيقية و $a_n\neq 0$

*) $P(x)$ أو P تسمى حدودية من الدرجة n ونكتب $\deg P=n$.

*) الأعداد $a_n,....,a_1,a_0$ تسمى معاملات الحدودية P .

b) تكون حدودية منعدمة إذا وفقط إذا كانت جميع معاملاتها منعدمة.

c) الحدودية المنعدمة ليست لها درجة.

d) تكون حدوديتان متساويتان إذا وفقط إذا كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

e) كل حدودية من الدرجة 1: $P(x)=ax+b$ تسمى حدانية.

f) كل حدودية من الدرجة 2: $P(x)=ax^2+bx+c$ تسمى ثلاثية الحدود.

2)

a) $\deg(P+Q)\leq \sup(\deg P,\deg Q)$

b) $\deg(P-Q)\leq \sup(\deg P,\deg Q)$

c) $\deg(P\cdot Q)=\deg P+\deg Q$

3) القسمة على $\boxed{x-\alpha}$

a) لتكن $P(x)$ حدودية. نقول إن العدد α جذر للحدودية P أو صفر للحدودية P إذا وفقط إذا كان $P(\alpha)=0$

b) لتكن $P(x)$ حدودية.

$P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ إذا وفقط إذا كان $P(\alpha)=0$.

ملاحظة:

a) إذا أردنا أن نتحقق هل $P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ نقوم بحساب $P(\alpha)$.

*) إذا كان $P(\alpha)=0$ فإن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$.

*) إذا كان $P(\alpha)\neq 0$ فإن $P(x)$ لا تقبل القسمة على $x-\alpha$.

b) إذا أردنا أن نتحقق هل $P(x)$ تقبل القسمة على $x+\alpha$ نقوم بحساب $P(-\alpha)$.

II) المعادلات والمتراجحات من الدرجة II.

1) حل المعادلة $\boxed{ax^2+bx+c=0}$

نعتبر المعادلة $(E): ax^2+bx+c=0$ حيث $a\neq 0$

من أجل حل المعادلة (E) نقوم بحساب العدد $\Delta=b^2-4ac$

*) العدد Δ يسمى مميزا لمعادلة (E).

*) إذا كان $\boxed{\Delta\rangle 0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين هما.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

*) إذا كان $\boxed{\Delta=0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا $x=\frac{-b}{2a}$

*) إذا كان $\boxed{\Delta\langle 0}$ فإن المعادلة (E) لا تقبل أي حل.

ملاحظة:

a) نعتبر المعادلة $(E): ax^2+2b'x+c=0$ (يعني $b=2b'$)

نستعمل المميز المختصر Δ' عوض المميز Δ . ولدينا $\Delta'=b'^2-ac$

*) إذا كان $\boxed{\Delta'\rangle 0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين هما.

$$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}\qquad x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$$

*) إذا كان $\boxed{\Delta'=0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا $x=\frac{-b'}{a}$

*) إذا كان $\boxed{\Delta'\langle 0}$ فإن المعادلة (E) لا تقبل أي حل.

b) إذا كان $\Delta=\alpha^2$ فإن المعادلة تقبل حلين

$$x_1=\frac{-b-\alpha}{2a}\qquad x_2=\frac{-b+\alpha}{2a}$$

2) تعميل ثلاثية الحدود

نعتبر ثلاثية الحدود $P(x)=ax^2+bx+c$ مع $a\neq 0$

من أجل تعميل $P(x)$ نقوم بحل المعادلة (E) $ax^2+bx+c=0$

*) إذا كان $\boxed{\Delta\rangle 0}$ فإن المعادلة E تقبل حلين x_1 و x_2 ويكون تعميل $P(x)$ هو $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

*) إذا كان $\boxed{\Delta=0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا x_0 ويكون تعميل $P(x)$ هو $P(x)=a(x-x_0)^2$

*) إذا كان $\boxed{\Delta\langle 0}$ فإن المعادلة (E) ليس لها حل والحدودية $P(x)$ ليس لها تعميل.

ملاحظة:

إذا كان $\Delta=0$ فإن الحدودية $P(x)$ عبارة عن متطابقة هامة.

3) إشارة ثلاثية الحدود.

نعتبر الحدودة $P(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

من أجل دراسة إشارة $P(x)$ نقوم بحل المعادلة $(E): ax^2+bx+c=0$

*) إذا كان $\boxed{\Delta\rangle 0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2

وتكون إشارة $P(x)$ هي

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	إشارة a	0	عكس إشارة a	0	إشارة a

*) إذا كان $\boxed{\Delta=0}$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا x_0 وتكون إشارة $P(x)$ هي:

x		x_0	
ax^2+bx+c	إشارة a	0	إشارة a

*) إذا كان $\boxed{\Delta\langle 0}$ فإن المعادلة (E) ليس لها حل وتكون إشارة $P(x)$ هي:

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a	

4) مجموع وجداء جدري معادلة من الدرجة II.

a) نعتبر المعادلة $(E): ax^2+bx+c=0$

*) إذا أردنا أن نبين أن المعادلة (E) تقبل حلين نقوم بحساب Δ ونجد $\Delta \geq 0$.

*) يمكن حساب مجموع وجداء هاذين الحلين بدون حل المعادلة باستعمال الصيغ التالية
$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

b) إذا أردنا تحديد معادلة من الدرجة II يكون α و β حلين لها.
نقوم بحساب $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ نجد $\alpha+\beta=S$ و $\alpha\cdot\beta=P$
وتكون هذه المعادلة هي $x^2-Sx+P=0$

c) إذا أردنا حل النظمة $\begin{cases} x+y=S \\ x\cdot y=P \end{cases}$ نقوم بحل المعادلة $t^2-St+P=0$

إذا كان x_1 و x_2 هما الحلين فإن $\begin{cases} x\equiv x_1 \\ y=x_2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=x_2 \\ y=x_1 \end{cases}$
$$S=\{(x_1,x_2),(x_2,x_1)\}$$

ملاحظة:

1) ليكن α و β حلي المعادلة $ax^2+bx+c=0$.

نعلم أن $\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

إذا أردنا حساب حد يحتوي على α و β
نحاول إظهار $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$.

أمثلة: *) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

*) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)$
$=(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\alpha\beta\right]$
$=(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\right]$

*) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$.

2) ليكن x_1 و x_2 حلي معادلة من الدرجة الثانية. من أجل دراسة إشارة x_1 و x_2 نقوم بحساب x_1+x_2 و $x_1\cdot x_2$.

*) إذا كان $\boxed{x_1x_2\langle 0}$ فإن أحد العدد x_1 و x_2 موجب والآخر سالب.

*) إذا كان $\boxed{x_1x_2\rangle 0}$ فإن x_1 و x_2 لهما نفس الإشارة وهي إشارة x_1+x_2.

III) النظمـــات الخطية

1) المعادلات من الدرجة I بمجهولين:

نعتبر المعادلة $ax+by+c=0$ (1) حيث أحد العددين a أو b غير منعدم. من أجل حل المعادلة (1) نحسب x بدلالة y إذا كان $a\neq 0$ أو نحسب y بدلالة x إذا كان $b\neq 0$. مثلا إذا كان $a\neq 0$
نجد $x=\dfrac{-by-c}{a}$ إذن $S=\left\{\left(\dfrac{-by-c}{a},y\right)/\,y\in\mathbb{R}\right\}$

2) نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين.

نعتبر النظمة $(S)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ حيث الأعداد a و b و a' و b' ليست كلها منعدمة.

من أجل حل النظمة (S) نقوم بحساب المحددات التالية.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-c'b \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c$$

a) إذا كان $\boxed{\Delta\neq 0}$: فإن النظمة تقبل حلا وحيدا.
$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad S=\{(x,y)\}$$

b) إذا كان $\boxed{\Delta=0}$:

*) إذا كان $\boxed{\Delta_x\neq 0}$ أو $\boxed{\Delta_y\neq 0}$ فإن النظمة (S) ليس لها حل $s=\varnothing$

*) إذا كان $\boxed{\Delta_x=0 \text{ و } \Delta_y=0}$ فإن النظمة (S) تكافئ إحدى المعادلتين.

3) إشـــــارة $\boxed{ax+by+c}$

من أجل دراسة إشارة $ax+by+c$ نقوم بإنشاء المستقيم $(D): ax+by+c=0$

المستقيم (D) يقسم المستوى (P) إلى نصفي مستوى (P_1) و (P_2).

إذا عوضنا x و y بإحداثيات أي نقطة من (P_1) فإننا نحصل على إشارة ثابتة.

وإذا عوضنا x و y بإحداثيات أي نقطة من (P_2) فإننا نحصل على إشارة عكس الإشارة السابقة. ولمعرفة هذه الإشارة نعوض x و y بإحداثيات نقطة من (P_1) أو (P_2) نأخذ عادة إحداثيات θ هي $x=0$ و $y=0$.

ج م ع	**المستقيم في المستوى** ملخص الدرس	ح.بوعيون

I- الأســــــاس

① نسمي أساسا كل زوج $(\vec{i},\vec{j})$ مكون من متجهتين غير مستقيميتين $\vec{i}$ و $\vec{j}$.

② ليكن $B=(\vec{i},\vec{j})$ أساس . كل متجهة $\vec{u}$ تكتب بطريقة وحيدة على شكل $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ الزوج (x,y) يسمى زوج إحداثيتي المتجهة $\vec{u}$ بالنسبة للأساس B ونكتب $\vec{u}(x,y)$ أو $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

ملاحظة: إذا أردنا تحديد إحداثيات المتجهة $\vec{u}$ بالنسبة للأساس. $B=(\vec{i},\vec{j})$ نقوم بحساب المتجهة $\vec{u}$ بدلالة $\vec{i}$ و $\vec{j}$. وإذا وجدنا $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ فإن زوج إحداثيتي $\vec{u}$ هو (x,y) ونكتب $\vec{u}(x,y)$.

③ ليكن $B=(\vec{i},\vec{j})$ أساسا.

a) لدينا $\vec{i}(1,0)$ و $\vec{j}(0,1)$

b) نعتبر المتجهتين $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$

لدينا $\vec{u}+\vec{v}(x+x',y+y')$ و $\vec{u}-\vec{v}(x-x',y-y')$ و $\alpha\vec{u}(\alpha x,\alpha y)$

c) نعتبر المتجهتين $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$

*) نسمي محددة المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بالنسبة للأساس B. العدد الذي نرمز له ب $\det(\vec{u},\vec{v})$ والمعرف بما يلي:

$$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=xy'-yx'$$

*) تكون المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتين إذا وفقط إذا كان $\det(\vec{u},\vec{v})\neq 0$

ملاحظة: 1) لتكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ متجهتين غير مستقيمتين.

*) إذا كان $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}=\vec{0}$ فإن $\alpha=\beta=0$

*) إذا كان $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}=\alpha'\vec{i}+\beta'\vec{j}$ فإن $\alpha=\alpha'$ و $\beta=\beta'$.

2) إذا كانت A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمة فإن المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مستقيمتين. وبالتلي تكون أساسا .

II- المعلـــــم

① نسمي معلما كل مثلوث $(o,\vec{i},\vec{j})$ حيث o نقطة و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ متجهتين غير مستقيمتين.

② نعتبر المعلم $R=(o,\vec{i},\vec{j})$

لكل نقطة M من المستوى المتجهة $\overrightarrow{OM}$ تكتب بطريقة وحيدة على شكل $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ الزوج (x,y) يسمى زوج إحداثيتي النقطة M بالنسبة للمعلم R ونكتب $M(x,y)$ أو $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ملاحظة: إذا أردنا تحديد إحداثيات M بالنسبة للمعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ نقوم بحساب $\overrightarrow{OM}$ بدلالة $\vec{i}$ و $\vec{j}$. إذا وجدنا $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ فإن $M(x,y)$.

③ نعتبر المعلم $R=(o,\vec{i},\vec{j})$.

ونعتبر النقطتين $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$

*) لدينا $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$.

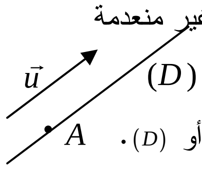
*) إذا كان I منتصف $[AB]$ فإن إحداثيات النقطة I هي:

$$x_I=\frac{x_A+x_B}{2} \quad , \quad y_I=\frac{y_A+y_B}{2}$$

ملاحظة: إذا كانت النقط A و B و C غير مستقيمة فإن المثلوث $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ معلم.

III- المستقيم في المستوى

① تعريف: لتكن A نقطة و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة المستقيم المار من A والموجه بالمتجهة $\vec{u}$ هو مجموعة النقط M التي يكون من أجلها $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيمين ونرمزله ب $D(A,\vec{u})$ أو (D).

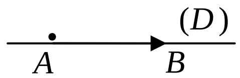


ملاحظة:

a) $M\in D(A,\vec{u})$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيمين.

b) ليكن (D) مستقيم. كل متجهة موازية ل (Δ) تكون موجهة ل (D).

c) المستقيم (AB) مار من A وموجه بالمتجهة $\overrightarrow{AB}$.



② **تمثيل بارامتري لمستقيم.**

تعريف:

ليكن (D) المستقيم المار من $A(x_0,y_0)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(a,b)$

تمثيل بارامتري للمستقيم (D) هو $(t\in IR)$ $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$: (D)

هذا التمثيل البارامتري يعني أن (D) هو مجموعة النقط التي تكون احداثيتها على شكل $(1+3t,2-4t)$ حيث $t\in IR$.

يعني كلما عوضنا t بقبمة من IR نحصل على احداثيات نقطة من (D).

مثلا من أجل $t=1$ نجد $x=4$ $y=-2$ إذن $M(4,-2)\in(D)$.

③ **معادلة ديكارتية لمستقيم.**

a) ليكن (D) المستقيم المار من $A(x_0,y_0)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(a,b)$ للحصول على معادلة ديكارتية ل (D) نتبع ما يلي:

$M(x,y)\in(D)$ يعني $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u})=0$

يعني $\begin{vmatrix}x-x_0 & a\\ y-y_0 & b\end{vmatrix}=0$

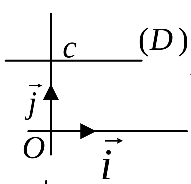
يعني $b(x-x_0)-a(y-y_0)$

نقوم بالنشر ونحصل على معادلة على شكل $Ax+By+C=0$ مع $(A,B)\neq(0,0)$ وهي معادلة ديكارتية ل (D) ونكتب $(D):Ax+By+C=0$.

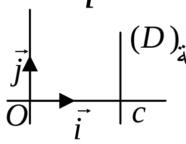
b) نعتبر المجموعة $(D):ax+by+c=0$

(D) مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{u}(-b,a)$.

c) *) إذا كان (D) مستقيما موازيا لمحور الأفاصيل فإن المتجهة $\vec{i}(1,0)$ موجهة له وتكون معادلته على شكل $y=c$.



*) إذا كان (D) مستقيما موازيا لمحور الأراتيب فإن المتجهة $\vec{j}(0,1)$ موجهة له وتكون معادلته على شكل $x=c$.



*) محور الأفاصيل هو المستقيم المار من $o(0,0)$ والموجه ب $\vec{i}(1,0)$ معادلته $y=0$.

*) محور الأراتيب هو المستقيم المار من $o(0,0)$ والموجه ب $\vec{j}(0,1)$ معادلته $x=0$.

4) المرور من معادلة ديكارتية إلى تمثيل بارامتري والعكس.

أمثلة:

a) نعتبر المستقيم $(\Delta):x+2y-1=0$ للحصول على تمثيل بارامتري ل (Δ) نستخرج نقطة ومتجهة ل (Δ) أو: $y=t$ أو $x=t$ ونحسب الآخر.

مثلا: نضع $y=t$ إذن $x+2t-1=0$ يعني $x=1-2t$ إذن $(\Delta)\begin{cases}x=1-2t\\ y=t\end{cases}$.

b) نعتبر المستقيم $(\Delta):\begin{cases}x=1+2t\,(1)\\ y=3+t\;\;(2)\end{cases}$ للحصول على معادلة ديكارتية ل (Δ) نستخرج نقطة ومتجهة موجهة أو نحسب t في (1) أو (2) ونعوض في الأخرى.

مثلا: من (2) لدينا $t=-y-3$ وبالتعويض في (1) نجد $x=1-2y-6$ إذن $(\Delta):x+2y+5=0$.

5) الأوضاع النسبية لمستقيمين:

a) من أجل دراسة تقاطع المستقيمين (Δ) و (Δ') يمكن اتباع ما يلي:

i) إذا كان $(\Delta):\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\end{cases}$ ، $(\Delta'):\begin{cases}x=x_1+a't'\\ y=y_1+b't'\end{cases}$

نقوم بحل النظمة $(S)\begin{cases}x_0+at=x_1+a't'\\ y_0+bt=y_1+b't'\end{cases}$

*) إذا كان ل (S) حلا وحيدا $t=.$ و $t'=.$ فإن (Δ) و (Δ') يتقاطعان في نقطة ونحصل على إحداثياتهما بتعويض t في تمثيل (Δ) .

*) إذا كان للنظمة (S) مالا نهاية له من الحلول فإن $(\Delta')=(\Delta)$.

ii) إذا كان $(\Delta):\begin{cases}x=1+t\\ y=-1+2t\end{cases}$ و $(\Delta'):2x-3y+1=0$

نقوم بحل النظمة $(S)\begin{cases}x=1+t & (1)\\ y=-1+2t & (2)\\ 2x-3y+1=0 & (3)\end{cases}$

بتعويض x و y في (3) نحصل على معادلة من الدرجة

*) إذا كان لهذه المعادلة حل في (Δ) و (Δ') يتقاطعان في نقطة. نعوض t في (1) و (2) ونحصل عليها.

*) إذا كانت المعادلة لا تقبل حل فإن (Δ) و (Δ') متوزيان قطعا.

*) إذا كانت المعادلة تقبل ما لا نهاية له من الحلول فإن $(\Delta)=(\Delta')$.

iii) إذا كان $(\Delta):x+2y-1=0$ و $(\Delta'):2x-y+1=0$ نقوم بحل النظمة $(S)\begin{cases}2x-y+1=0\\ x+2y-1=0\end{cases}$ نفس حالات i).

b) نعتبر المستقيمين $\begin{cases}(\Delta):ax+by+c=0\\ (\Delta'):a'x+b'y+c'=0\end{cases}$

i) إذا كان $\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}\neq0$ فإن (Δ) و (Δ') متقاطعان ونحل النظمة للحصول على نقطة التقاطع.

ii) إذا كان $\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}=0$ فإن $(\Delta)//(\Delta')$

*) إذا كان $\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}\neq0$ أو $\begin{vmatrix}b & c\\ b' & c'\end{vmatrix}\neq0$ فإن $(\Delta)//(\Delta')$ قطعا.

*) إذا كان $\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}=0$ أو $\begin{vmatrix}b & c\\ b' & c'\end{vmatrix}=0$ فإن $(\Delta)=(\Delta')$.

c) إذا أردنا أن نبين أن (Δ) و (Δ') متوزيان أو غير متوازيين نختار متجهة $\vec{u}$ موجهة ل (Δ) و $\vec{v}$ موجهة ل (Δ') ونحسب $\det(\vec{u},\vec{v})$

i) إذا كان $\det(\vec{u},\vec{v})=0$ فإن $(\Delta)//(\Delta')$

ii) إذا كان $\det(\vec{u},\vec{v})\neq0$ فإن (Δ) و (Δ') متقاطعان.

d) إذا كان $(\Delta)//(\Delta')$ فإن أي متجهة موجهة لأحدهما موجهة للآخر.

6) المعادلة المختصرة لمستقيم

a) إذا كان (Δ) مستقيما غير موازي لمحور الآراتيب فإن معادلته تكتب على شكل $y=mx+p$ هذه المعادلة تسمى المعادلة المختصرة.

العدد ة يسمى المعامل الموجه أو ميل المستقيم (Δ) .

b) ليكن (Δ) مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{u}(a,b)$ مع $a\neq0$ (يعني $(\Delta)\not\parallel(y'oy)$) المعامل الموجه ل (Δ) هو $m\frac{b}{a}$.

c) نعتبر المستقيمين $(\Delta):y=mx+p$ و $(\Delta'):y=m'x+p'$ يكون $(\Delta)//(\Delta')$

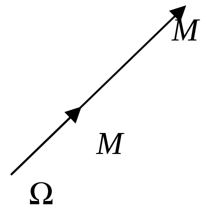
إذا وفقط كان $m=m'$

ح.بوعيون	التحويـلات الإعتيـاديـــة ملخـــص الدرس	ج م ع

I) التحــــــا كــــي

A) تعريف

لتكن Ω نقطة و k عدد حقيقي غير منعدم .
التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k هو التطبيق الذي نرمز له بـ $h(\Omega,k)$ والذي يربط كل نقطة M من (P) بالنقطة M' بحيث " $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$ ".



B) الخاصية المميزة

تكون النقطتان M' و N' صورتي النقطتين M و N على التوالي بتحاكي h إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي $k\neq 1$ بحيث $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$.

C) خاصيـــات

ليكن h تحاكي مركزه Ω ونسبته k .

1) $h(M)=M'$ تكافئ $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

2) إذا كان $h(M)=M'$ و $h(N)=N'$ فإن $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

3) a $h(\Omega)=\Omega$ (نقول إن Ω صامدة بالتحاكي h)

b $h(M)=M$ تكافئ $M=\Omega$

(هذا يعني أن Ω هي النقطة الوحيدة الصامدة بالتحاكي h)

4) إذا كان $h(M)=M'$ فإن Ω و M و M' مستقيمية .

5) a التحاكي يحافظ على المرجح يعني :
إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ فإن G' مرجح $\{(A',\alpha),(B',\beta)\}$

b) التحاكي يحافظ على المنتصف يعني :
إذا كان I منتصف $[AB]$ فإن I' مرجح $[A'B']$

c) التحاكي يحافظ على معامل استقامية متجهتين يعني :
إذا كان $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{CD}$ فإن $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\overrightarrow{C'D'}$

d) التحاكي يحافظ على استقامية 3 نقط يعني :
إذا كانت النقط A و B و C مستقيمية فإن صورها A' و B' و C' مستقيمية .

6) التحاكي لا يحافظ على المسافة لكن لدينا .
إذا كان $h(A)=A'$ و $h(B)=B'$ فإن $A'B'=|k|AB$

7) التحاكي يحافظ عل قياس الزوايا الهندسية يعني $B'\hat{A'}C'=B\hat{A}C$

8) a صورة القطعة $[AB]$ بالتحاكي h هي القطعة $[A'B']$

b) صورة المستقيم (AB) بالتحاكي h هي المستقيم $(A'B')$.

c) صورة مستقيم (D) هو مستقيم (D') يوازي (D) .

d) من أجل تحديد صورة مستقيم (D) بـ h يكفي تحديد صورة نقطتين A و B من (D) وسيكون $h(D)=(A'B')$ أو تحديد صورة نقطة واحدة A وسيكون $h(D)$ هو المستقيم المار من A' والموازي للمستقيم (D) . ($h(A)=A'$)

e) إذا كان (D) مستقيما مارا من Ω فإن $h(D)=(D)$.
(نقول إن (D) صامد إجماليا) .

9) صورة الدائرة $C(O,r)$ بالتحاكي h هي الدائرة $C'(O',|k|r)$.
مع $O'=h(O)$.

10) a) ليكن E و F جزئين من المستوى .
$h(E\cap F)=h(E)\cap h(F)$

b) إذا كانت $M\in E\cap F$ فإن $h(M)\in h(E)\cap h(F)$

11) التحاكي يحافظ على التعامد والتوازي يعني :
صورة مستقيمين متعامدين هما مستقيمان متعامدان
و صورة مستقيمين متوازيين هما مستقيمان متوازيان .

12) الصيغة التحليلية لتحاكي .

نفترض أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) مثال1 : ليكن h تحاكي مركزه $\Omega(1,2)$ ونسبته $k=2$.
من أجل تحديد الصيغة التحليلية للتحكي h نتبع مايلي :
ليكن $M(x,y)$ و $M(x',y')$ بحيث $h(M)=M'$ ونقوم بحساب x' و y' بدلالة x و y .
لدينا $h(M)=M'$ يعني $\overrightarrow{\Omega M'}=2\overrightarrow{\Omega M}$
ولدينا $\overrightarrow{\Omega M'}(x'-1,y'-2)$ و $2\overrightarrow{\Omega M}(2x-2,2y-4)$

إذن $\begin{cases} x'-1=2x-2 \\ y'-2=2y-4 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x'=2x-1 \\ y'=2y-2 \end{cases}$

إذن الصيغة التحليلية لـ h هي : $h:\begin{cases} x'=2x-1 \\ y'=2y-2 \end{cases}$

ملاحظة : إذا أردنا تحديد صورة نقطة A بـ h نعوض x و y بإحداثيات A ونحصل على إحداثيات $h(A)$.

b) مثال 2 .

نعتبر التطبيق f الذي صيغته التحليلية هي : $f:\begin{cases} x'=3x+2 \\ y'=3y-4 \end{cases}$

من أجل تحديد طبعة f نبحث عن النقط الصامدة بحل النظمة $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$

يعني $\begin{cases} 3x+2=x \\ 3y-4=y \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ إذن f تقبل نقطة صامدة وحيدة هي $\Omega(-1,2)$.

ثم نأخذ $M(x,y)$ و $M(x',y')$ بحيث $h(M)=M'$

لدينا إذن $\begin{cases} x'=3x+2 \\ y'=3y-4 \end{cases}$. ولدينا $\overrightarrow{\Omega M'}(x+1,y'-2)$ يعني

$\overrightarrow{\Omega M'}(3x+2+1,3y-4-2)$ يعني $\overrightarrow{\Omega M'}(3x+3,3y-6)$

ولدينا $3\overrightarrow{\Omega M}(3x+3,3y-6)$ إذن $\overrightarrow{\Omega M'}=3\overrightarrow{\Omega M}$

وبالتالي f تحاكي مركزه $\Omega(-1,2)$ ونسبته $k=3$.

13) بعض التقنيات .

a) لكي نحدد مركز تحاكي h . نسميه Ω نبحث عن نقطتين A و B وصورتاهما A' و B' . لدينا $h(A)=A'$ إذن Ω و A و A' مستقيمية ومنه $\Omega\in(AA')$. ولدينا $h(B)=B'$ إذن Ω و B و B' مستقيمية ونه $\Omega\in(BB')$ وبالتالي Ω هي نقطة تقاطع (AA') و (BB')

b) من أجل تحديد نسة تحاكي h نسميه k و هناك إمكانيتان :

$*$) نبحث عن المركز Ω ونقطة A وصورتها 'A .

لدينا $h(A)=A'$ إذن $\overrightarrow{\Omega A'}=k\,\overrightarrow{\Omega A}$ ، ونقوم بحساب $\overrightarrow{\Omega A'}$ بدلالة $\overrightarrow{\Omega A}$ نجد مثلا $\overrightarrow{\Omega A'}=\alpha\overrightarrow{\Omega A}$ ونستنتج أن $k=\alpha$ أو نمر إلى القياس الجبري $\overline{\Omega A'}=k\,\overline{\Omega M}$ يعني $k=\dfrac{\overline{\Omega A'}}{\overline{\Omega M}}$.

$*$) نبحث عن نقطتين A و B وصورتاهما 'A و 'B .لدينا $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$ ونتبع نفس الطريقة السابقة .

c) إذا أردنا أن نبين أن I' منتصف $[A'B']$ نبحث عن I و A و B بحيث $h(A)=A'$ و $h(B)=B'$ و $h(I)=I'$ ونستعمل الخاصية 5b . لدينا I منتصف $[AB]$ إذن I' منتصف $[A'B']$.

d) لكي نبين أن Ω و I و J مستقيمية يكفي أن نبين أن $h_{(\Omega,k)}(I)=J$.

e) لكي نحدد صورة نقطة M هناك عدة طرق من بينها :

$*$) نستعمل التعريف $\overrightarrow{\Omega M'}=k\,\overrightarrow{\Omega M}$

$*$) إذا كان M منتصف قطعة $[AB]$ نستعمل (5b) .

$*$) إذا كانت $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}$ نستعمل (5c) .

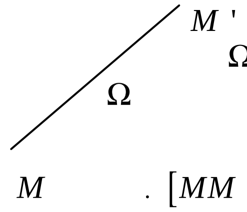
$*$) إذا كانت M تقاطع جزئين نستعمل (10) .

(لدينا $M\in E\cap F$ إذن $h(M)\in h(E)\cap h(F)$)

$*$) إذا كانت لدينا الصيغة التحليلية نستعملها .

II) التمـــــاثل المركـــزي

A) تعريف .



لتكن Ω نقطة التماثل المركزي الذي مركزه Ω هو التطبيق الذي نرمز له بـ S_Ω والذي يربط كل نقطة M من (P) بالنقطة M' بحيث " $\overrightarrow{\Omega M'}=-\overrightarrow{\Omega M}$ يعني Ω منتصف $[MM']$.

B) الخاصية المميزة

تكون النقطتان M' و N' صورتي النقطتين M و N على التوالي بتماثل مركزي S_Ω إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{M'N'}=-\overrightarrow{MN}$.

C) خاصيـــات

جميع الخاصيات المتعلقة بالتحاكي تبقى صحيحة بالنسبة للتماثل المركزي مع تعويض k بـ 1- ، ماعدا (6) و (9) حيث تصبح .

6) التماثل المركزي يحافظ على المسافة يعني .

إذا كان $h(A)=A'$ و $h(B)=B'$ فإن $A'B'=AB$

9) صورة الدائرة $C(O,r)$ بالتماثل المركزي S_Ω هي الدائرة $C'(O',r)$. مع $O'=S_\Omega(O)$.

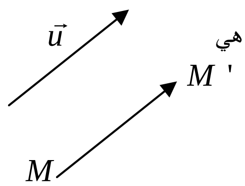
ملاحظة

a) $S_\Omega(M)=M'$ تكافئ Ω منتصف $[MM']$.

b) إذا كان $S_\Omega(M)=M'$ و $S_\Omega(N)=N'$ فإن $\overrightarrow{M'N'}=-\overrightarrow{MN}$.

III) الإزاحـــــــــــة

A) تعريف .



لتكن $\vec{u}$ متجهة . الإزاحة التي متجهتها $\vec{u}$ هي التطبيق الذي نرمز له بـ $t_{\vec{u}}$ والذي يربط كل نقطة M من (P) بالنقطة M' بحيث " $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

B) الخاصية المميزة

تكون النقطتان M' و N' صورتي النقطتين M و N على التوالي بالإزاحة $t_{\vec{u}}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$.

C) خاصيـــات

جميع الخاصيات المتعلقة بالتحاكي تبقى صحيحة بالنسبة للإزاحة ، ماعدا (1) و (2) و (3) و(4) و (6) و (8cde) و (9) و (12) و (13abd) ولدينا :

6) الإزاحة تحافظ على المسافة .

8e) إذا كان (D) يوازي حامل $\vec{u}$ (يعني $\vec{u}$ موجهة لـ (D)) فإن $t_{\vec{u}}(D)=(D)$.

9) صورة الدائرة $C(O,r)$ بالإزاحة $t_{\vec{u}}$ هي الدائرة $C'(O',r)$. مع $O'=t_{\vec{u}}(O)$.

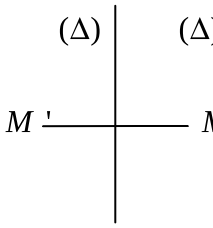
ملاحظة

a) $t_{\vec{u}}(M)=M'$ تكافئ $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$.

b) إذا كان $t_{\vec{u}}(M)=M'$ و $t_{\vec{u}}(N)=N'$ فإن $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$.

III) التمـــاثل المحـــوري

A) تعريف .



لتكن (Δ) مستقيما التماثل المحوري الذي محوره (Δ) هو التطبيق الذي نرمز له بـ $S_{(\Delta)}$ والذي يربط كل نقطة M من (P) بالنقطة M' بحيث يكون (Δ)واسط القطعة $[MM']$.

B) خاصيـــات

جميع الخاصيات المتعلقة بالتحاكي تبقى صحيحة بالنسبة للتماثل المحوري ، ماعدا (1) و (2) و (3) و(4) و 5 (6) و (8e) و (9) و (13abd) ولدينا :

6) التماثل المحوري يحافظ على المسافة .

8e) $*$) إذا كان $(D)\perp(\Delta)$ فإن $t_{(\Delta)}(D)=(D)$.

$*$) إذا كان $(D)//(\Delta)$ فإن $t_{(\Delta)}(D)//(D)$.

9) صورة الدائرة $C(O,r)$ بالتماثل المحوري $S_{(\Delta)}$ هي الدائرة $C'(O',r)$. مع $O'=S_{(\Delta)}(O)$.

ملاحظة

a) $S_{(\Delta)}(M)=M'$ تكافئ (Δ)واسط القطعة $[MM']$.

b) إذا كان $S_{(\Delta)}(M)=M$ تكافئ $M\in(\Delta)$

المستقيم (Δ) صامد نقطة بنقطة .

الأولى ج م ع	الجداء السلمي ملخص الدرس	ح.بوعيون

I) تعريف

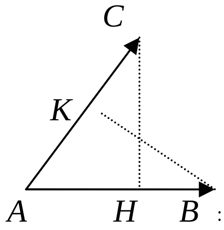
1) لتكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين غير منعدمتين .

ليكن H المسقط العمودي لـ C على (AB)

و K المسقط العمودي لـ B على (AC)

نسمي الجداء السلمي للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

العدد الحقيقي الذي نرمز له بـ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ والمعرف بما يلي :



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB}.\overline{AH}$$
$$= \overline{AC}.\overline{AK}$$
$$= AB.AC.\cos(B\hat{A}C)$$

2) إذا كانت إحدى المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ أو $\overrightarrow{AC}$ فإن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

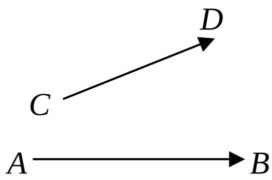
II) خاصيات

1) لتكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتين غير منعدمتين .

ليكن C' المسقط العمودي لـ C على (AB)

ليكن D' المسقط العمودي لـ D على (AB)

لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB}.\overline{C'D'}$



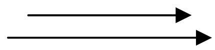
ملاحظة :

من اجل حساب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ نسقط إحدى المتجهتين على الأخرى ونمر من المتجهات إلى القياس الجبري ،مع الإحتفاظ بالنقط التي أسقطنا عليها ، ونعوض النقط التي أسقطناها بمساقطها .

2) a) نرمز لـ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\overrightarrow{AB}^2$ ويسمى المربع السلمي .

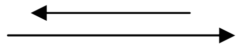
b) لدينا $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$

3) a) إذا كانت التجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتين ولهما نفس المنحى فإن :



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB.CD$$

b) إذا كانت التجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتين ولهما منحيان متعاكسان فإن :

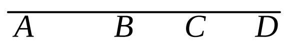


$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB.CD$$

4) a) نقول إن المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعامدتان إذا وفقط إذا كان كن المستقمان (AB) و (CD) متعامدين . ونكتب $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

b) لدينا $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ تكافئ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

5) إذا كانت النقط A و B و C و D مستقيمية فإن

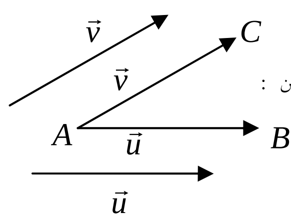


$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB}.\overline{CD}$$

6) a) لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين ولتكن A و B و C 3 نقط بحيث

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \ , \ \overrightarrow{AC} = \vec{v}$$

لدينا : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$



b) لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين :

لدينا $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

c) $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

d) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين ولهما نفس المنحى فإن : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

e) إذا كانت التجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين ولهما منحيان متعاكسان فإن :

$$\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$$

f) $\vec{u} \perp \vec{v}$ تكافئ $\vec{u}.\vec{v} = 0$

g) *) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

*) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

*) $\vec{u}.(\vec{v}-\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} - \vec{u}.\vec{w}$

*) $(\alpha\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$

*) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$

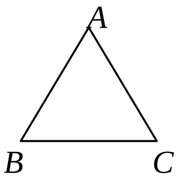
*) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$

*) $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

III) تطبيقات الجداء السلمي

1) علاقة الكاشي .

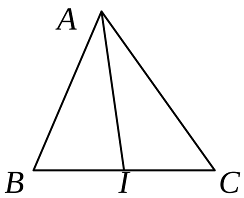
ليكن (ABC) مثلثا لدينا :



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\hat{A}$$
$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos\hat{B}$$
$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos\hat{C}$$

2) مبرهنة المتوسط

ليكن (ABC) مثلثا و I منتصف القطعة $[AB]$

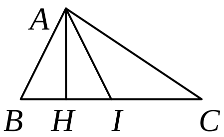


لدينا : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

أو $AI^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2})$

3) العلاقات المترية في مثلث قائم الزاوية .

a) ليكن (ABC) مثلثا قائم الزاوية في A و A' منتصف $[BC]$ و H المسقط العمودي لـ A على (BC) . لدينا :



*) $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (علاقة فتاغورس)

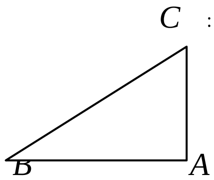
*) $BA^2 = \overline{BH}.\overline{BC} = BH.BC$

*) $CA^2 = \overline{CH}.\overline{CB} = CH.CB$

*) $AH^2 = -\overline{HB}.\overline{HC} = HB.HC$

*) $AA' = \frac{1}{2}BC$

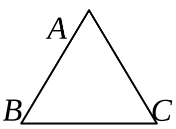
b) ليكن (ABC) مثلثا قائم الزاوية في A . لدينا :



$$\cos\hat{B} = \frac{BA}{BC} \qquad \cos\hat{B} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan\hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

c) ليكن (ABC) مثلثا . لدينا :



$$\frac{\sin\hat{A}}{BC} = \frac{\sin\hat{B}}{AC} = \frac{\sin\hat{C}}{AB}$$

نفترض في كل ما يلي أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

I) تحليلية الجداء السلمي

1) نعتبر المتجهتين $\vec{u}(x;y)$ و $\vec{v}(x',y')$

لدينا $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$ و $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

2) نعتبر النقطتين $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$

لدينا $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$ و $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

3) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

4)

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos(\overline{\vec{u},\vec{v}})$.

b) $\sin(\overline{\vec{u},\vec{v}})=\dfrac{\det(\vec{u}\cdot\vec{v})}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$ $\qquad$ $\cos(\overline{\vec{u},\vec{v}})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

c) $\cos(B\hat{A}C)=\cos(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC}$

d) $\sin(B\hat{A}C)=\left|\sin(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\right|=\left|\dfrac{\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{AB\cdot AC}\right|$.

ملاحظة:

a) إذا أردنا تحديد قياسا للزاوية الهندسية $B\hat{A}C$ يكفي حساب $\cos(B\hat{A}C)$

نجد مثلا: $\cos(B\hat{A}C)=-\frac{1}{2}$

يعني $\cos(B\hat{A}C)=\cos\frac{2\pi}{3}$

إذن $B\hat{A}C=\frac{2\pi}{3}$.

b) إذا أردنا تحديد قياس الزاوية الموجهة $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ نقوم بحساب $\cos(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ و $\sin(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.

نجد مثلا: $\cos(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ و $\sin(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

ومن أجل تحديد قياس الزاوية نتبع ما يلي:

$\cos(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ يعني $\cos(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\cos\frac{3\pi}{4}$

يعني $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ أو $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{-3\pi}{4}+2k\pi$

ولدينا $\sin(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\langle 0$

إذن $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{-3\pi}{4}+2k\pi$

يعني $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\frac{-3\pi}{4}+2k\pi$

5) **المستقيم في المستوى**

a) ليكن (D) مستقيم و $\vec{n}$ متجهة. نقول إن المتجهة $\vec{n}$ منظمية على (D) إذا كان حامل $\vec{n}$ عمودي على (D) (يعني $\vec{n}\perp(D)$).

b) نعتبر المستقيم: $(D):ax+by+c=0$

لدينا $\vec{u}(-b,a)$ موجهة ل (D) و $\vec{n}(a,b)$ منظمية على (D).

c) **معادلة مستقيم معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه.**

مثال: حدد المعادلة ديكارتية للمستقيم (D) المار من $A(1,2)$ والمتجهة $\vec{n}(-3,4)$ منظمية عليه.

طريقة 1.

$$M(x,y)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow-3(x-1)+4(y-2)=0$$

إذن $(D):-3x+4y-5=0$

طريقة 2. لدينا $\vec{n}(-3,4)$ منظمية على (D) إذن معادلة (D) على شكل $(D):-3x+4y-5=0$ ولدينا $A(1,2)$ إذن $(-3)\cdot1+4(2)+c=0$ يعني $c=-5$ إذن $(D):-3x+4y-5=0$.

d) ليكن (D) مستقيم مار من A و $\vec{n}$ منظمية عليه.

و (D') مستقيم مار من A' و $\vec{n}'$ منظمية عليه.

*) يكون $(D)\perp(D')$ إذا وفقط إذاكان $\vec{n}\perp\vec{n}'$ يعني $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$.

*) يكون $(D)/\!/(D')$ إذا وفقط إذا كان $\vec{n}/\!/\vec{n}'$ يعني $\det(\vec{n}\cdot\vec{n}')=0$.

e) نعتبر المستقيمين: $(D):ax+by+c=0$ $\quad$ $(D'):a'x+b'y+c'=0$

*) يكون $(D)\perp(D')$ إذا وفقط إذا كان $aa'+bb'=0$.

*) يكون $(D)/\!/(D')$ إذا وفقط إذا كان $\begin{vmatrix}a&b\\a'&b'\end{vmatrix}=0$

f) **مسافة نقطة عن مستقيم.**

i) ليكن (D) مستقيم و A نقطة من المستوى.

نسمي مسافة A عن (D) العدد الذي نرمز له ب $d(A,(D))$ والمعرف بما يلي $d(A,(D))=AH$ حيث H هي المسقط العمودي ل A على (D).

ii) نعتبر المستقيم $(D):ax+by+c=0$ والنقطة $A(x_0,y_0)$

لدينا $d(A,(D))=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

ملاحظة: مسافة النقطة A عن المستقيم (D) هي أصغر مسافة بين A ونقط المستقيم (D).

g) واسط القطعة $[AB]$ هو المستقيم المار من I منتصف $[AB]$ و $\overrightarrow{AB}$ منظمية عليه.

h) *) مركز ثقل المثلث (ABC) هو تقاطع المتوسطات.

*) مركز تعامد المثلث (ABC) هو تقاطع الارتفاعات.

*) مركز الدائرة المحيطة بالمثلث (ABC) هو تقاطع الواسطات.

*) مركز الدائرة المحاطة بالمثلث (ABC) هو تقاطع المنصفات.

II) دراسة تحليلية للدائرة.

1) الدائرة التي مركزها Ω وشعاعها r هي مجموعة M التي تحقق $\Omega M = r$.

2) معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها r هي $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ نقوم بالنشر ونحصل على معادلة على شكل $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$.

3) نعتبر المجموعة (Γ) التي معادلتها $(\Gamma): x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$
من أجل دراسة طبيعة المجموعة (Γ) هناك طريقتان:

ط1: نضع $a=-\frac{\alpha}{2}$ $b=-\frac{\beta}{2}$ $c=\gamma$ ونقوم بحساب a^2+b^2-c

*) إذا كان $\boxed{a^2+b^2-c\langle 0}$ فإن $\Gamma=\varnothing$

*) إذا كان $\boxed{a^2+b^2-c=0}$ فإن $\Gamma=\{\Omega(a,b)\}$

*) إذا كان $\boxed{a^2+b^2-c\rangle 0}$ فإن (Γ) دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

ط2: نقوم بتحويل المعادلة لنرجعها على شكل $(x-a)^2+(y-b)^2=k$ باستعمال بداية متطابقة هامة $\boxed{X^2+\alpha X=\left(X+\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}$.

*) إذا كان $k\langle 0$ فإن $(\Gamma)=\varnothing$.

*) إذا كان $k=0$ فإن $\Gamma=\{\Omega(a,b)\}$.

*) إذا كان $k\rangle 0$ فإن (Γ) دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها $r=\sqrt{k}$.

4) **معادلة دائرة معرفة بأحد أقطارها.**
لتكن (ℓ) دائرة أحد أقطارها $[AB]$ للحصول على معادلة (ℓ) هناك طريقتان:

ط1: نستعمل الصيغة: $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

$M(x,y)\in(\ell)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$

ط2: نتبع ما يلي: $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-x_B \\ y-y_B \end{pmatrix}$

ملاحظة: إذا كان (ABC) قائم الزاوية في A فإن الدائرة المحيطة بالمثلث (ABC) هي الدائرة التي قطرها $[BC]$. مركزها هو منتصف $[BC]$ شعاعها هو $\frac{BC}{2}$.

5) **تمثيل بارامتري لدائرة.**
تمثيل بارامتري للدائرة (ℓ) التي مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها r هو $(\theta\in\mathbb{R})$ $(C):\begin{cases} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\sin\theta \end{cases}$.

6) **داخل خارج دائرة:**
لتكن (C) دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها r معادلتها $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ونعتبر النقطة $M(\alpha,\beta)$.

*) تكون M خارج الدائرة (ℓ) إذا وفقط إذا كان:
$\Omega M\rangle 0$ أو $\alpha^2+\beta^2+a\alpha+b\beta+c\rangle 0$

*) تكون M داخل الدائرة (ℓ) إذا وفقط إذا كان:
$\Omega M\langle 0$ أو $\alpha^2+\beta^2+a\alpha+b\beta+c\langle 0$.

*) $M\in(C)$ إذا وفقط إذا كان $\Omega M=r$ أو $\alpha^2+\beta^2+a\alpha+b\beta+c=0$.

7) **تقاطع مستقيم ودائرة.**
لتكن (C) دائرة مركزها Ω وشعاعها r ومعادلتها
$x^2+y^2+ax+by+c=0$
ونعتبر المستقيم $(\Delta):\alpha x+\beta y+\gamma=0$.
من أجل دراسة تقاطع (C) و (Δ) نقوم بحساب $d(\Omega,(\Delta))$.

a) إذا كانت $\boxed{d(\Omega,(\Delta))\rangle r}$ فإن (Δ) يوجد خارج (C) وبالتالي لا يقطع (C) .

b) إذا كانت $\boxed{d(\Omega,(\Delta))=r}$ فإن (Δ) يقطع (C) في نقطة واحدة A . ونقول في هذه الحالة إن (Δ) مماس ل (C) في النقطة A و A تسمى نقطة التماس.
وللحصول على نقطة التماس نقوم بحل النظمة $\begin{cases} x^2+y^2+ax+by=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma=0 \end{cases}$.

c) إذا كانت $\boxed{d(\Omega,(\Delta))\langle r}$ فإن (Δ) يقطع (C) في نقطتين A و B ، وللحصول على احداثيات النقطتين A و B نقوم بحل النظمة $\begin{cases} x^2+y^2+ax+by=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma=0 \end{cases}$.

8) **معادلة مماس لدائرة.**
لتكن (C) دائرة مركزها Ω وشعاعها r ومعادلتها $x^2+y^2+ax+by+c=0$ وليكن (T) المماس ل (C) في النقطة $A(x_0,y_0)$.
للحصول على معادلة (T) هناك طريقتان:

ط1: نستعمل الصيغة $(T): x_0x+y_0y+\frac{a}{2}(x_0+x)+\frac{b}{2}(y_0+y)+c=0$

ط2: (T) هو المستقيم المار من Ω والمتجهة $\overrightarrow{\Omega A}$ منظمية عليه.

ملاحظة: يكون (T) مماسا ل (C) في A إذا وفقط إذا كان (T) عموديا على (ΩA) في A .

الأولى . س.ب. ع . ت	تحليـــليـــة الفضـــــاء ملخـــــص الـــــدرس	ح.بوعيون

I) الأساس في الفضاء التجهي V_3

1) لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ 3متجهات من V_3 و A و B و C و D 4نقط بحيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ و $\overrightarrow{AD}=\vec{w}$.

نقول إن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا كانت النقط A و B و C و D مستوائية .

نقول إن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية إذا وفقط إذا كانت النقط A و B و C و D غيرمستوائية .

2) لتكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ 3متجهات غير مستوائية من V_3 .

$*$) كل متجهة من V_3 تكتب بطريقة وحيدة على شكل

$$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

$*$) نقول إن المثلوث $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أساس في الفضاء V_3 .

$*$) إذا كانت $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ فإن المثلوث (x,y,z) يسمى مثلوث إحداثيات المتجهة $\vec{u}$ بالنسبة للأساس $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ونكتب $\vec{u}:(x,y,z)$ أو $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

3) ليكن $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أساس في الفضاء V_3 .

a) نعتبر المتجهتين $\vec{u}:(x,y,z)$ و $\vec{v}:(x',y',z')$.

لدينا $\vec{u}+\vec{v}:(x+x',y+y',z+z')$ و $\alpha\vec{u}:(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$

b) نعتبر المتجهتين $\vec{u}:(x,y,z)$ و $\vec{v}:(x',y',z')$.

من أجل دراسة استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نقوم بحساب المحددات الثلاثة المستخرجة من جدول إحداثيات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ وهي :

$\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix}x & x'\\z & z'\end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix}y & y'\\z & z'\end{vmatrix}$.

$*$) إذا كانت هذه المحددات الثلاثة منعدمة فإن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين .

$*$) إذا كانت إحدى هذه المحددات غير منعدمة فإن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غيرمستقيميتين .

c) نعتبر المتجهات $\vec{u}:(x,y,z)$ و $\vec{v}:(x',y',z')$ و $\vec{w}:(x'',y'',z'')$.

$*$) نسمي محددت المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ العدد الذي نرمز له بالرمز $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ والمعرف بما يلي :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}x & x' & x''\\y & y' & y''\\z & z' & z''\end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix}y' & y''\\z' & z''\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}x' & x''\\z' & z''\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}x' & x''\\y' & y''\end{vmatrix}$$

$*$) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا كان $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$

ملاحظة

a) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا وفقط إذا كان $\vec{v}=\alpha\vec{u}$ أو $\vec{u}=\alpha\vec{v}$

b) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين و $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}$ فإن $\alpha=\beta=0$

c) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا كانت إحداها تكتب بدلالة الأخرى مثلا : $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.

d) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية و $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ فإن $\alpha=\beta=\gamma=0$.

II) المعلـــــــم في الفضـــــــاء

1) نسمي معلما في الفضاء كل رباعي $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث O نقطة من الفضاء و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ 3متجهات غير مستوائية يعني أساس .

2) ليكن $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما في الفضاء .

a) لكل نقطة M من الفضاء المتجهة $\overrightarrow{OM}$ تكتب بطريقة وحيدة على شكل $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. المثلوث (x,y,z) يسمى مثلوث إحداثيات النقطة M بالنسبة المعلم R ونكتب $M(x,y,z)$ أو $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

ملاحظة $M(x,y,z)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

b) نعتبر النقطتين $A(x,y,z)$ و $B(x',y',z')$

$*$) لدينا $\overrightarrow{AB}(x'-x,y'-y,z'-z)$

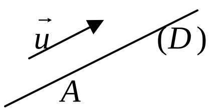
$*$) إذا كان I منتصف القطعة $[AB]$ فإن

$$I\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2},\frac{z+z'}{2}\right)$$

III) المستقبــــــــم فــــــي الفضــــــاء

1) تعريف

لتكن A نقطة و $\vec{u}$ متجهة . المستقيم المار من A والموجه بـ $\vec{u}$ هو المجموعة التي نرمز لها ب $D(A,\vec{u})$ والمعرفة ب



$$D(A,\vec{u})=\left\{M\in E\ /\ \overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}\right\}$$

ملاحظة $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين $\Leftrightarrow$ $M\in D(A,\vec{u})$

2) تمثيل بارامتري لمستقيم

تمثيل بارامتري للمستقيم (D) المار من $A(x_0,y_0,z_0)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(a,b,c)$ هو :

$$(D):\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}\quad(t\in IR)$$

3) معادلتان ديكارتيتان لمستقيم .

ليكن (D) المستقيم المار من $A(x_0,y_0,z_0)$ والموجه ب $\vec{u}(a,b,c)$

$*$) إذا كانت الأعداد a و b و c غير منعدمة فإن معادلتا (D) هما :

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

$*$) إذا كان عدد واحد منعدم وعددين غير منعدمين .مثلا $a\neq 0$ ، $b=0$ و $c\neq 0$ فإن معادلتا (D) هما :

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{z-z_0}{c}\\ y-y_0=0\end{cases}$$

*) إذا كان عددين منعدمين وعدد واحد غير منعدمين .مثلا $a=0$ ، $b=0$

و $c\neq 0$ فإن معادلتا (D) هما : $\begin{cases} x-x_0=0 \\ y-y_0=0 \end{cases}$

4) الأوضاع النسبية لمستقيمين .

ملاحظة من أجل دراسة الأوضاع النسبية لمستقيمين يستحسن استعمال تمثيلين باراميتريين .

نعتبر المستقيمين

$$(\Delta):\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases} \text{ و } (\Delta'):\begin{cases} x=x_1+a't' \\ y=y_1+b't' \\ z=z_1+c't' \end{cases}$$

لدينا (Δ) مار من $A(x_0,y_0,z_0)$ وموجه ب $\vec{u}(a,b,c)$

و (Δ') مار من $B(x_1,y_1,z_1)$ وموجه ب $\vec{u}(a',b',c')$

من أجل دراسة تقاطع (Δ) و (Δ') نقو بدراسة استقامية $\vec{u}$ و $\vec{v}$

a) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فإن $(\Delta)//(\Delta')$. ولمعرفة هل (Δ) و (Δ') منطبقان أم متوازيان قطعا . نتحقق هل $A\in(\Delta')$ ؟

*) إذا كان $A\in(\Delta')$ فإن $(\Delta)=(\Delta')$.

*) إذا كان $A\notin(\Delta')$ فإن (Δ) و (Δ') متوازيان قطعا .

b) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين فإن (Δ) و (Δ') متقطعان أو غير مستوائيين ، ولمعرفة أي حالة لدينا نقوم بحل النظمة :

$$(S)\begin{cases} x_0+at=x_1+a't' \\ y_0+bt=y_1+b't' \\ z_0+ct=z_1+c't' \end{cases}$$

بحل النظمة المكونة من معادلتين والتحقق في الثالثة .

i) إذا كان للنظمة (S) حلا فإن (Δ) و (Δ') متقاطعان وللحصول على إحداثيات نقطة التقاطع نعوض t في تمثيل (Δ) أو t' في تمثيل (Δ') .

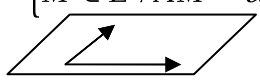
ii) إذا كانت النظمة (S) لا تقبل حلا فإن (Δ) و (Δ') غير مستوائيين.

IV) المستـــــــوى فــــــي الفضــــــاء

1) تعريف

لتكن A نقطة و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين . المستوى المار من A والموجه بـ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو المجموعة التي نرمز لها ب $P(A,\vec{u},\vec{v})$ والمعرفة ب

$$P(A,\vec{u},\vec{v})=\left\{M\in E\ /\ \overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\right\}$$



ملاحظة ($\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية) $\Leftrightarrow$ $M\in P(A,\vec{u},\vec{v})$

2) تمثيل باراميترى لمستوى

ليكن (P) المستوى المار من $A(x_0,y_0,z_0)$ والموجه بالمتجهتين $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$ تمثيل باراميتري للمستوى (P) هو :

$$(P):\begin{cases} x=x_0+at+a't' \\ y=y_0+bt+b't' \quad (t,t'\in IR) \\ z=z_0+ct+c't' \end{cases}$$

3) معادلة ديكارتية لمستوى .

ليكن (P) المستوى المار من $A(x_0,y_0,z_0)$ والموجه بالمتجهتين $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$.

للحصول على معادلة ديكارتية لـ (P) نتبع ما يلي :

$$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & a & a' \\ y-y_0 & b & b' \\ z-z_0 & c & c' \end{vmatrix}=0$$

نقوم بالنشر ونحصل على معادلة على شكل $Ax+By+Cz+D=0$ حيث $(A,B,C)\neq(0,0,0)$.

4) تقاطع مستويين .

ملاحظة من أجل دراسة تقاطع مستويين يستحسن استعمال معدلتين ديكارتيتين

نعتبر المستويين : $(P):ax+by+cz+d=0$ ، $(Q):a'x+b'y+c'z+d'=0$

من أجل دراسة تقاطع (P) و (Q) نقوم بحساب المحددات

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

a) إذا كانت هذه المحددات الثلاثة منعدمة فإن $(P)//(Q)$.

b) إذا كانت إحدى هذه المحددات غير منعدمة فإن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (D) الذي معادلتاه الديكارتيتان هما :

$$(D):\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

5) تقاطع مستوى ومستقيم .

ملاحظة من أجل دراسة تقاطع مستوى ومستقيم يستحسن استعمال معادلة ديكارتية بالنسبة للمستوى وتمثيل باراميتري بالنسبة للمستقيم .

نعتبر المستوى $(P):\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ والمستقيم

$$(\Delta):\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$$

من أجل دراسة تقاطع (P) و (Δ) نقوم بحل النظمة :

$$\begin{cases} x=x_0+at & (1) \\ y=y_0+bt & (2) \\ z=z_0+ct & (3) \\ \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 & (4) \end{cases}$$

ولهاذا نعوض x و y و z في (4) نحصل على معادلة من الدرجة (I) بمجهول واحد t .

a) إذا كان لهذه المعادلة حلا $t=t_0$ فإن (Δ) يقطع (P) في نقطة (نحصل على إحداثياتها بتعويض t في (1) و (2) و (3) .

b) إذا كان لهذه المعادلة مالانهاية له من الحلول $(0=0)$ فإن $(\Delta)\subset(P)$.

c) إذا كنت هذه المعادلة لاتقبل حلا" $(4=0)$ مثلا " فإن (Δ) و (P) متوازيان قطعا .

ملاحظة

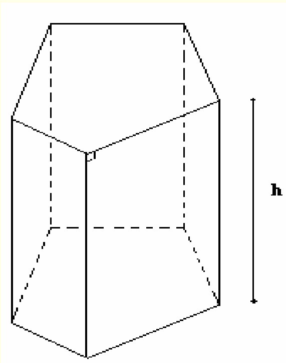
*) $D(A,\vec{u})//D'(B,\vec{v})$ تكافئ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين

*) $D(A,\vec{u})//P(B,\vec{v},\vec{w})$ تكافئ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية

*) $P(A,\vec{u},\vec{v})//P'(B,\vec{x},\vec{y})$ تكافئ $\vec{u}$ و $\vec{x}$ و $\vec{y}$ مستوائية و $\vec{v}$ و $\vec{x}$ و $\vec{y}$ مستوائية .

حساب الحجوم و المسافات

1- الموشورالقائم

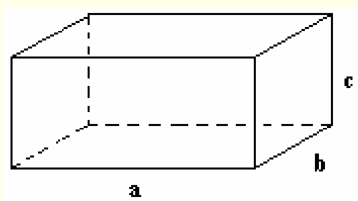


أ- ليكن h ارتفاع موشور قائم و l و B محيط و مساحة قاعدته على التوالي.

* المساحة الجانبية $S = l \times h$
* المساحة الكلية $S_T = l \times h + 2B$
* الحجم $V = B \times h$

ب- حالات خاصة

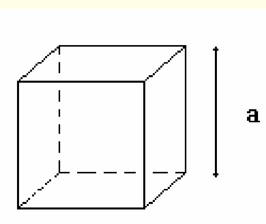
- متوازي المستطيلات



ليكن a و b و c طول و عرض و ارتفاع متوازي المستطيلات

* المساحة الجانبية $S = 2(a+b).c$
* المساحة الكلية $S_T = 2(a+b).c + 2ab$
* الحجم $V = a.b.c$

- المكعب



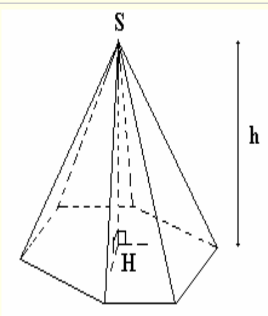
ليكن a طول حرف المكعب

المساحة الجانبية $S = 4a^2$

المساحة الكلية $S_T = 6a^2$

الحجم $V = a^3$

2- الهرم



أ- ليكن h ارتفاع هرما رأسه S

$h = SH$ حيث H المسقط العمودي لـ S على المستوى المتضمن للقاعدة.

ليكن B مساحة قاعدة الهرم.

المساحة الجانبية هي مساحة جميع الأوجه الجانبية للهرم

الحجم $V = \frac{1}{3} B.h$

ب- الهرم المنتظم

إذا كانت قاعدة هرم على شكل مضلع منتظم و كان المسقط للرأس هو مركز المضلع فان الهرم يسمى هرما منتظما.

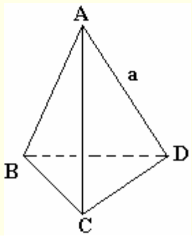
في جميع المثلثات وجوه الهرم المنتظم يكون للارتفاعات المارة من رأس الهرم نفس الطول و يسمى عامد الهرم.

المساحة الجانبية لهرم منتظم هي $S_L=\frac{1}{2}l.c$ حيث l محيط القاعدة و c عامد الهرم $(c=CH)$

الحجم $V=\frac{1}{3}B\times OS$ حيث O مركز القاعدة و S رأس الهرم و B مساحة قاعدته

ج- رباعي الأوجه المنتظم

ليكن a طول حرف رباعي الأوجه منتظم



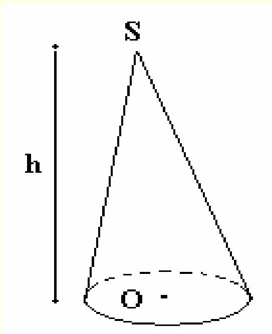
المساحة الجانبية $S=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^3$

الحجم $V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

3- المخروط

أ- S رأس مخروط و الدائرة (C) قاعدته شعاعها R

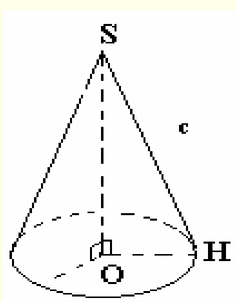
h ارتفاع المخروط (مسافة بين رأس المخروط و المستوى المحدد بالقاعدة)



حجم المخروط $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$

ب- المخروطي الدوراني

إذا كان المسقط العمودي لرأس مخروط هو مركز القاعدة فان المخروط يسمى مخروطا دورانيا.



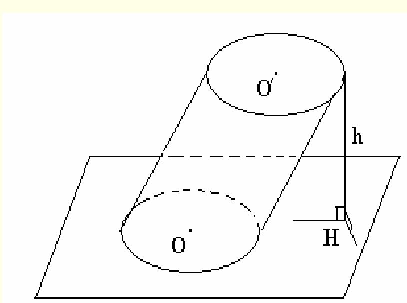
المساحة الجانبية هي $S_L=\pi Rc$

حيث c المسافة بين S ونقطة من الدائرة

$c=SH$

4- الأسطوانة

أ- حجم أسطوانة ارتفاعها h و قاعدتها قرص شعاعها R



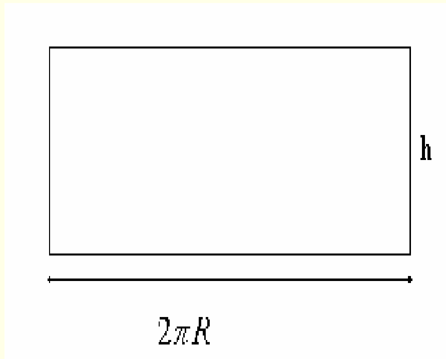
هو $V=\pi R^2h$

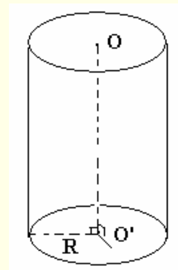
ب- الأسطوانة القائمة

إذا كان المستقيم المار من مركز الدائرتين قاعدتي أسطوانة عموديا على المستويين المحددين بهاتين القاعدتين فان الأسطوانة

تسمى أسطوانة قائمة

المساحة الجانبية هي $S_L = 2\pi Rh$

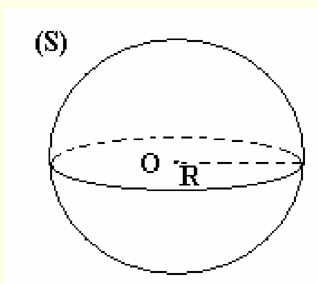




5- الفلكة

مساحة الفلكة التي شعاعها R هي $S = 4\pi R^2$

حجم الفلكة التي شعاعها R هي $V = \frac{4}{3}\pi R^3$



تمرين

ليكن $ABCD$ معينا ضمن مستوى (P) حيث $BD = 3cm$ و $AC = 3cm$

لتكن S نقطة من المستقيم العمودي على (P) في A حيث $SA = 8cm$

أحسب حجم الهرم $SABCD$

تمرين

أحسب حجم فلكة مساحتها تساوي $1m^2$

تمرين

ليكن $ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات حيث $AB = 3cm$ و $AD = 5cm$ و $AE = 4cm$

1- أحسب حجم رباعي الأوجه $ADGH$

2- استنتج المسافة بين النقطة D و المستوى (AGH)

الأولى ب ع ت	**عموميات حول الدوال** **ملخص الدرس**	ح.بوعيون

I- دالة زوجية – دالة فردية

1) من أجل دراسة زوجية دالة، نقوم بتحديد D_f ونتحقق أن لكل x من D_f لدينا $-x\in D_f$ ثم نحسب $f(-x)$.

*) إذا وجدنا $f(-x)=f(x)$ فإن f زوجية.

*) إذا وجدنا $f(-x)=-f(x)$ فإن f فردية.

2) *) يمكن لدالة أن لا تكون لا زوجية ولا فردية.

*) $(-x)^n=\begin{cases} x^n \; ; & n \text{ زوجي} \\ -x^n \; ; & n \text{ فردي} \end{cases}$ $\qquad |-x|=|x|$

3) تكون f زوجية إذا وفقط إذا كان C_f متماثلا بالنسبة لمحور الأراتيب.

4) تكون f فردية إذا وفقط إذا كان C_f متماثلا بالنسبة لأصل المعلم.

II- رتابة دالة

1) من أجل دراسة رتابة دالة f على مجال I: نعتبر x و y من I بحيث $x<y$ ونقارن $f(x)$ و $f(y)$.

*) إذا وجدنا $f(x)\le f(y)$ $(f(x)<f(y))$ فإن f تزايدية (قطعا) على I.

*) إذا وجدنا $f(x)\ge f(y)$ $(f(x)>f(y))$ فإن f تناقصية (قطعا) على I.

*) إذا وجدنا $f(x)=f(y)$ فإن f ثابتة على I.

2) من أجل دراسة رتابة f على مجال I: نعتبر x و y من I بحيث $x\neq y$ ونقوم بحساب معدل التغيير $T(x;y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ ونقوم بدراسة إشارة $T(x,y)$ (بتأطيره مثلا).

*) إذا وجدنا $T(x,y)\ge 0$ $(T(x,y)>0)$ فإن f تزايدية (قطعا) على I.

*) إذا وجدنا $T(x,y)\le 0$ $(T(x,y)<0)$ فإن f تناقصية (قطعا) على I.

*) إذا وجدنا $T(x,y)=0$ فإن f ثابتة على I.

3) نقول إن f رتيبة على I إذا كانت تزايدية أو تناقصية على I.

4) a) لتكن f دالة زوجية.

*) إذا كانت f تزايدية على I فإن f تناقصية على $-I$.

*) إذا كانت f تناقصية على I فإن f تزايدية على $-I$.

b) لتكن f دالة فردية.

*) إذا كانت f تزايدية على I فإن f تزايدية على $-I$.

*) إذا كانت f تناقصية على I فإن f تناقصية على $-I$.

c) إذا كان $I=[a,b]$ فإن $-I=[-b,-a]$.

III- مقارنة دالتين

1) a) نقول إن f موجبة على D وتكتب $f\ge 0$ إذا كان $f(x)\ge 0$ لكل x من D.

b) نقول إن f سالبة على D وتكتب $f\le 0$ إذا كان $f(x)\le 0$ لكل x من D.

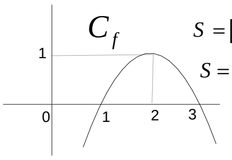
ملاحظات: (التأويل الهندسي)

*) تكون $f\ge 0$ على D إذا وفقط إذا كان C_f فوق محور الأفاصيل.

*) تكون $f\ge 0$ على D إذا وفقط إذا كان C_f تحت محور الأفاصيل.

*) حلول المتراجحة $f(x)\ge 0$ هي اتحاد المجالات التي يكون فيها C_f فوق محور الأفاصيل.

*) حلول المتراجحة $f(x)\le 0$ هي اتحاد المجالات التي يكون فيها C_f تحت محور الأفاصيل.



مثال: *) حلول المتراجحة $f(x)\ge 0$ هو $S=[1,3]$

*) حلول المتراجحة $f(x)\le 0$ $S=]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$

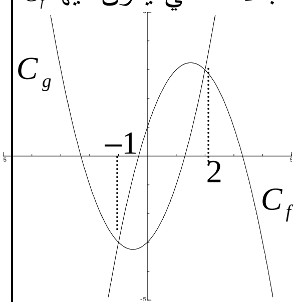
*) حلول المتراجحة $f(x)>0$ $S=]1,3[$

2) نقول إن $f\le g$ على D إذا وفقط إذا كان $f(x)\le g(x)$ لكل x من D.

ملاحظات: (التأويل الهندسي)

*) تكون $f\le g$ إذا وفقط إذا كان C_f تحت C_g.

*) حلول المتراجحة $f(x)\le g(x)$ هي المجالات التي يكون فيها C_f تحت C_g.



مثال: *) حلول المتراجحة $f(x)\ge g(x)$ هي: $S=[-1,2]$.

*) حلول المتراجحة $f(x)\le g(x)$ هي: $S=]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[$.

*) حلول المتراجحة $f(x)>g(x)$ هي: $S=]-1,2[$

3) a) تقاطع C_f مع محور الأراتيب هي النقطة $A(0,f(0))$.

b) *) من أجل تحديد تقاطع C_f مع محور الأفاصيل نحل المعادلة $f(x)=0$ إذا كانت x_1 و x_2 ... هي الحلول فإن نقط تقاطع هي $A(x_1,0);B(x_2,0)$ ...

*) حلول المعادلة $f(x)=0$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع محور الأفاصيل.

c) *) لكي نحدد تقاطع C_f و C_g نحل المعادلة $f(x)=g(x)$ وإذا كانت x_1 و x_2 .. هي الحلول فإن نقط تقاطع C_f و C_g هي $A(x_1,f(x_1)),B(x_2,f(x_2))$ ....

*) حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f و C_g.

IV- دالة مكبورة – دالة مصغورة

1) نقول إن f مكبورة على D إذا وُجد عدد M بحيث $f(x)\le M$ لكل x من D.

2) نقول إن f مصغورة على D إذا وُجد عدد m بحيث $f(x)\ge m$ لكل x من D.

3) نقول إن f محدودة على D إذا وُجد عدد m و M بحيث $m\le f(x)\le M$ لكل x من D.

ملاحظة: تكون f محدودة على D إذا وُجد عدد موجب M بحيث $|f(x)|\le M$ لكل x من D.

V- مطارف دالة

1) لكي نبين أن f تقبل قيمة قصوية مطلقة في x_0 نبين أن $f(x)\le f(x_0)$ لكل x من D_f. وتكون هذه القيمة القصوية هي $f(x_0)$.

2) لكي نبين أن f تقبل قيمة دنوية مطلقة في x_0 نبين أن $f(x)\ge f(x_0)$ لكل x من D_f. وتكون هذه القيمة الدنوية هي $f(x_0)$.

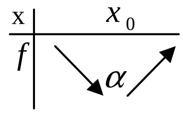
3) لكي نبين أن α قيمة قصوية مطلقة ل f نبين أن $f(x)\le\alpha$ ونبحث عن x_0 بحيث $f(x_0)=\alpha$.

4) لكي نبين أن α قيمة دنوية مطلقة ل f نبين أن $f(x)\ge\alpha$ ونبحث عن x_0 بحيث $f(x_0)=\alpha$.

5) لكي نبين f تقبل قيمة قصوية نسبية عند x_0 نبين أنه يوجد مجال I يحتوي على x_0 بحيث $f(x)\le f(x_0)$ لكل x من I . وتكون هذه القيمة القصوية هي $f(x_0)$. (تعريف مماثل بالنسبة لقيمة دنوية نسبية)

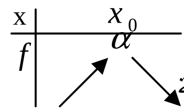
ملاحظة:

a) إذا كان جدول تغيرات f هو



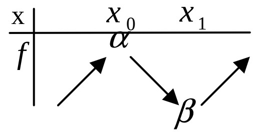
فإن α هي القيمة الدنوية المطلقة

b) إذا كان جدول تغيرات f هو



فإن α هي القيمة القصوية المطلقة

c) إذا كان جدول تغيرات f هو



فإن α هي قيمة قصوية نسبية و β قيمة دنوية نسبية.

VI- صور جزء من IR بدالة عددية

1) $f(D)=\{f(x)/x\in D\}$ يعني $f(D)$ هي المجموعة المكونة من صور جميع عناصر D .

2) $y\in f(D)$ يعني يوجد x من D بحيث $f(x)=y$.

3) لكي نبين أن $f(I)=J$ جبريا نبين ما يلي:

a) $f(I)\subset J$ ولهذا نأخذ $x\in I$ ونبين أن $f(x)\in J$.

b) $J\subset f(I)$ ولهذا نأخذ $y\in J$ ونبين أن $y\in f(I)$ ولهذا نبحث عن $x\in I$ بحيث $f(x)=y$.

VII- مركب دالتين

1) لتكن f و g دالتين بحيث $f(D_f)\subset D_g$ الدالة gof هي الدالة المعرفة على D_f بما يلي $(\forall x\in D_f)\ gof(x)=g(f(x))$.

2) a) من أجل تحديد حيز تعريف gof نتبع ما يلي: $x\in D_{gof}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D_f\\ f(x)\in D_g\end{cases}$

b) لكي نبين أن $g\circ f$ معرفة على I نبين ما يلي: $\begin{cases}I\subset D_f\\ f(I)\subset D_g\end{cases}$

3) إذا كانت f و g تحققان ما يلي:

* f رتيبة على I
* $f(I)\subset J$
* g رتيبة على J

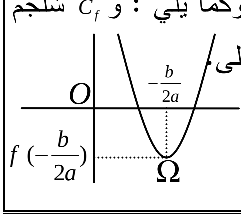
فإن $g\circ f$ رتيبة على I

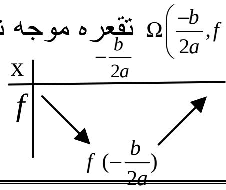
تكون $g\circ f$ تزايدية إذا كانت لـــ f و g نفس الرتابة.
وتكون تناقصية إذا كانت لـــ f و g رتابتين مختلفتين

VIII- الدوال الاعتيادية

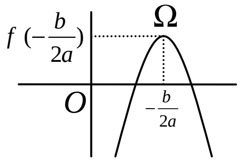
1) الدالة $\boxed{f(x)=ax^2+bx+c}$ $(a\neq 0)$

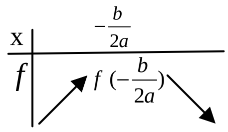
a) إذا كان $a>0$ فإن جدول تغيرات f هوكما يلي : و C_f شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{-b}{2a},f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ تقعره موجه نحو الأعلى.





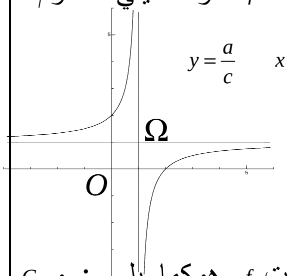
b) إذا كان $a<0$ فإن جدول تغيرات f هوكما يلي : و C_f شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{-b}{2a},f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ تقعره موجه نحو الأسفل.

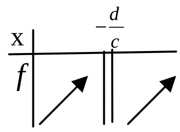




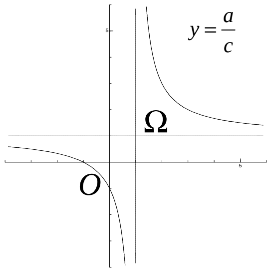
2) الدالة $\boxed{f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}}$ مع $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$ $\quad D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$

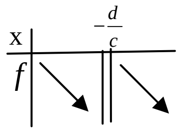
a) إذا كان $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}>0$ فإن جدول تغيرات f هوكما يلي : و C_f هذلول مركزه $\Omega\left(\frac{-d}{c},\frac{a}{c}\right)$ متراباه $x=\frac{-d}{c}$ $\quad y=\frac{a}{c}$





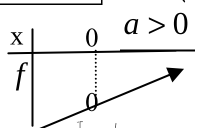
b) إذا كان $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}<0$ فإن جدول تغيرات f هوكما يلي : و C_f هذلول مركزه $\Omega\left(\frac{-d}{c},\frac{a}{c}\right)$ متراباه $x=\frac{-d}{c}$ $\quad y=\frac{a}{c}$



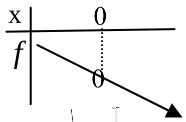


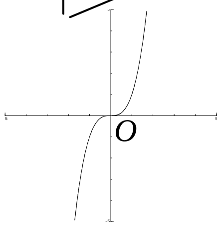
3) الدالة $\boxed{f(x)=ax^3}$

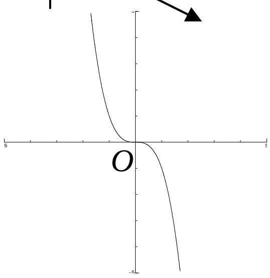
$a>0$



$a<0$

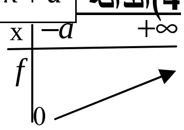


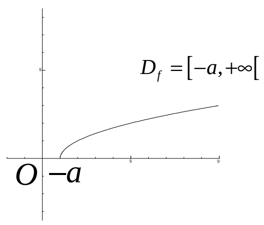




ملاحظة: بالنسبة ل $f(x)=ax^3+b$ نفس الشيء تصبح فقط $f(0)=b$

4) الدالة $\boxed{f(x)=\sqrt{x+a}}$ $\quad D_f=[-a,+\infty[$





ملاحظة: بالنسبة ل $f(x)=\sqrt{x+a}+b$ نفس الشيء تصبح فقط $f(-a)=b$

5) a) نعتبر الدالة $g(x)=|f(x)|$. C_g مكون من جزء C_f الموجود فوق محور الأفاصيل. ومماثل جزء Cf الموجود تحت محور الأفاصيل بالنسبة لمحور الأفاصيل.

b) نعتبر الدالة $g(x)=f(|x|)$. C_g مكون من جزء C_f الموجود في $[0,+\infty[$ ومماثله بالنسبة لمحور الأراتيب.

6) حلول المعادلة $f(x)=m$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f والمستقيم $(\Delta): y=m$.

ج.م.ع	الدوال العددية	ح.بوعيون

I) مجموعة التعريف

1) تعريف مجموعة تعريف الدالة f هي مجموعة الأعداد التي لها صورة ونرمز لها بـــ D_f

2) مجموعة تعريف الدالة : $f(x)=\dfrac{p(x)}{Q(x)}$

تكون $f(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $Q(x)\neq 0$. نقوم بحل المعادلة $Q(x)=0$ ولدينا $D_f=\mathbb{R}-\{$ حلول المعادلة $\}$

3) مجموعة تعريف الدالة: $f(x)=\sqrt{P(x)}$

تكون $f(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $P(x)\geq 0$ نقوم بدراسة إشارة $P(x)$ ولدينا $D_f=$ (اتحاد المجالات التي يكون فيها $P(x)\geq 0$)

II) دالة زوجية دالة فردية .

1) من أجل دراسة زوجية دالة f نقوم بتحديد D_f ونتحقق أن لكل x من D_f لدينا $-x\in D_f$ ثم نقوم بحساب $f(-x)$.

*) إذا وجدنا $f(-x)=f(x)$ فإن f زوجية .

*) إذا وجدنا $f(-x)=-f(x)$ فإن f فردية .

ملاحظة a) يمكن لدالة أن لاتكون لا زوجية ولا فردية .

b) $(-x)^n=\begin{cases} x^n & n \text{ زوجي} \\ -x^n & n \text{ فردي}\end{cases}$ $\qquad |-x|=|x|$

2) تكون f **زوجية** إذا وفقط إذا كان المنحنى C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب .

3) تكون f **فردية** إذا وفقط إذا كان المنحنى C_f متماثل بالنسبة لأصل المعلم .

III) تغيرات دالة أو رتابة دالة .

1) من أجل دراسة رتابة دالة f على مجال I نعتبر x و y من I بحيث $x<y$ *ونقارن* $f(x)$ و $f(y)$.

*) إذا وجدنا $f(x)\leq f(y)$ فإن f تزايدية على I .

*) إذا وجدنا $f(x)<f(y)$ فإن f تزايدية قطعا على I .

*) إذا وجدنا $f(x)\geq f(y)$ فإن f تناقصية على I .

*) إذا وجدنا $f(x)>f(y)$ فإن f تناقصية قطعا على I .

*) إذا وجدنا $f(x)=f(y)$ فإن f ثابتة على I .

2) من أجل دراسة رتابة دالة f على مجال I نعتبر x و y من I بحيث $x\neq y$ *ونقوم بحساب معدل التغير* $T(x,y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ *وندرس إشارته .*

*) إذا وجدنا $T(x,y)\geq 0$ فإن f تزايدية على I .

*) إذا وجدنا $T(x,y)>0$ فإن f تزايدية قطعا على I .

*) إذا وجدنا $T(x,y)\leq 0$ فإن f تناقصية على I .

*) إذا وجدنا $T(x,y)<0$ فإن f تناقصية قطعا على I .

*) إذا وجدنا $T(x,y)=0$ فإن f ثابتة على I .

3) نقول إن f **رتيبة** على المجال I إذا كانت تزايدية أو تناقصية على I .

ملاحظة

a) f تزايدية على I يعني C_f تصاعدي في I عندما نتحرك من اليسار نحو اليمين

b) f تناقصية على I يعني C_f تنازلي في المجال I عندما نتحرك من اليسار نحو اليمين

c) f ثابتة على I يعني C_f عبارة عن مستقيم موازي لمحور الأفاصيل في المجال I .

مثال لدينا f تزايدية على كل من $[1,3]$ و $[5,9]$ وتناقصية على $[3,5]$ ونلخص هذا في جدول يسمى جدول التغيرات .

4) رتابة الدالة $f(x)=ax+b$

a) إذا كان $a>0$ فإن f تزايدية على $\mathbb{R}$

b) إذا كان $a>0$ فإن f تزايدية على $\mathbb{R}$

c) إذا كان $a=0$ فإن f ثابتة على $\mathbb{R}$

d) منحنى الدالة f يكون مستقيما .

5) رتابة دالة زوجية ودالة فردية

a) لتكن f دالة زوجية .

*) إذا كانت f تزايدية على I فإن f تناقصية على $-I$.

*) إذا كانت f تناقصية على I فإن f تزايدية على $-I$.

b) لتكن f دالة فردية .

*) إذا كانت f تزايدية على I فإن f تزايدية على $-I$.

*) إذا كانت f تناقصية على I فإن f تناقصية على $-I$.

c) إذا كان $I=[a,b]$ فإن $-I=[-b,-a]$.

IV) مطارف دالة .

1) إذا أردنا أن نبين أن الدالة f تقبل قيمة قصوية في x_0 ، نبين أن $f(x)\leq f(x_0)$ في مجال I يحتوي على x_0 وتكون هذه القيمة القصوية هي $f(x_0)$.

2) إذا أردنا أن نبين أن الدالة f تقبل قيمة دنوية في x_0 ، نبين أن $f(x)\ge f(x_0)$ في مجال I يحتوي على x_0 وتكون هذه القيمة الدنوية هي $f(x_0)$.

3) a) لكي نبين أن α قيمة قصوية للدالة f ، نبين أن $f(x)\le \alpha$ في مجال I ونبحث عن x_0 من I بحيث $f(x_0)=\alpha$.

b) لكي نبين أن α قيمة دنوية للدالة f ، نبين أن $f(x)\ge \alpha$ في مجال I ونبحث عن x_0 من I بحيث $f(x_0)=\alpha$.

4) إذا كان جدول تغيرات f على شكل

فإن α قيمة قصوية للدالة f في x_0

و β قيمة دنوية للدالة f في x_1 .

5) إذا كان منحنى الدالة f على شكل

فإن α قيمة قصوية للدالة f في x_0

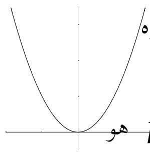
و β قيمة دنوية للدالة f في x_1 .

V) الدوال المرجعية .

1) دراسة الدالة $f(x)=ax^2$ $(a\neq 0)$

x		0	
f	↘	0	↗

a) إذا كان $a>0$ فإن جدول تغيرات f هو



ويكون C_f شلجما رأسه أصل المعلم ومحوره محور الأراتيب تقعره موجه نحو الأعلى .

b) إذا كان $a<0$ فإن جدول تغيرات f هو

ويكون C_f شلجما رأسه أصل المعلم ومحوره محور الأراتيب تقعره موجه نحو الأسفل .

2) دراسة الدالة $f(x)=\dfrac{a}{x}$ $(a\neq 0)$ $D_f=\mathbb{R}^*$

a) إذا كان $a>0$ فإن جدول تغيرات f هو

ويكون C_f هذلولا مركزه أصل المعلم مقارباه محوري المعلم .

b) إذا كان $a<0$ فإن جدول تغيرات f هو

ويكون C_f هذلولا مركزه أصل المعلم مقارباه محوري المعلم .

3) دراسة الدالة $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

من أجل إنشاء C_f نحدد معادلة مختصرة ل C_f .ولهذا نكتب $f(x)$ علىشكل $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ ثم ننطلقمن $y=f(x)$ يعني $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ يعني $y-\beta=a(x-\alpha)^2$ ثم نضع $\begin{cases}X=x-\alpha\\ Y=y-\beta\end{cases}$

إذن المعادلة تصبح $Y=aX^2$ في العلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ مع $\Omega(\alpha,\beta)$

4) دراسة الدالة $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

من أجل إنشاء C_f نحدد معادلة مختصرة لــ C_f .ولهذا نكتب $f(x)$ على شكل $f(x)=\beta+\dfrac{\gamma}{x-\alpha}$ ثم ننطلق من $y=f(x)$ يعني $y-\beta=\dfrac{\gamma}{x-\alpha}$ ثم نضع $\begin{cases}X=x-\alpha\\ Y=y-\beta\end{cases}$ إذن المعادلة تصبح $Y=\dfrac{\gamma}{X}$ في العلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ مع $\Omega(\alpha,\beta)$.

5) تقاطع منحنى مع محور ي المعلم .

a) تقاطع C_f مع محور الأراتيب هي النقطة $A(0,f(0))$.

b) *) لكي نحدد تقاطع المنحنى C_f مع محور الأفاصيل نقوم بحل المعادلة $f(x)=0$ وإذا كانت هذه الحلول هي x_1 ، x_2 ... فإن نقط التقاطع هي $A(x_1,0)$ ، $B(x_2,0)$ ... .

*) حلول المعادلة $f(x)=0$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع محور الأفاصيل .

6) تقاطع منحنيين .

*) لكي نحدد تقاطع المنحنى C_f و C_g نقوم بحل المعادلة $f(x)=g(x)$ وإذا كانت هذه الحلول هي x_1 ، x_2 ... فإن نقط التقاطع هي $A(x_1,f(x_1))$ ، $B(x_2,f(x_2))$ ... .

*) حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع C_g

7) دراسة الوضع النسبي لمنحنيين .

a) لكي ندرس الوضع النسبي للمنحنيين C_f و C_g نقوم بدراسة إشارة $f(x)-g(x)$

*) إذا كان $f(x)-g(x)\ge 0$ فإن C_f يوجد فوق C_g .

*) إذا كان $f(x)-g(x)\le 0$ فإن C_f يوجد تحت C_g .

b) حلول المتراجحة $f(x)\le g(x)$ هي اتحاد المجالات التي يكون فيها C_f تحت C_g

8) حل المعادلة $(E):f(x)=m$

حلول المعادلة (E) هي أفاصيل نقط تقاطع C_f والمستقيم $(\Delta):y=m$

9) إنشاء منحنى الدالة $g(x)=|f(x)|$ انطلاقا من C_f .

إذا كان $f(x)\ge 0$ يعني C_f فوق محور الأفاصيل فإن $g(x)=f(x)$ إذن C_g منطبق مع C_f .

وإذا كان $f(x)\le 0$ يعني C_f تحت محور الأفاصيل فإن $g(x)=-f(x)$ إذن C_g مماثل C_f بانسبة لمحور الأفاصيل.

وبالتالي C_g مكون من جزء C_f الموجود فوق محور الأفاصيل ومماثل جزء C_f الموجود تحت محور الأفاصيل بالنسبة لمحور الأفاصيل .

10) إنشاء منحنى الدالة $g(x)=f(|x|)$ انطلاقا من C_f .

لدينا $g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x)$ إذن g دالة زوجية وبالتالي منحناها متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب . ولدينا لكل $x\in[0,+\infty[$: $|x|=x$

إذن $g(x)=f(x)$ ومنه C_g منطبق مع C_f .

وبالتالي C_g مكون من جزء C_f الموجود في $[0,+\infty[$ ومماثله بالنسبة لمحور الأراتيب .

الأولى ع ت	النهايات و الإتصال ملخص الدرس	ح.بوعيون

I) النهايات

1) الأشكال الغير محددة:

$+\infty-\infty$	$\infty\times0$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$

2) العمليات على النهايات الغير منتهية:

$+\infty+a=+\infty$

$-\infty+a=-\infty$

$+\infty+\infty=+\infty \qquad (a\in\mathbb{R})$

$-\infty-\infty=-\infty$

$+\infty-\infty$ ش غ محدد

$a\times\infty=\infty \qquad (a\neq0)$

$\infty\times\infty=\infty$

$0\times\infty$ ش غ محدد

$\frac{a\neq0}{0}=\infty \qquad \frac{a}{\infty}=0 \qquad \frac{\infty}{a}=\infty$

ش غ محدد $\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$

$$(-\infty)^n=\begin{cases}+\infty & \text{si } n \text{ est paire}\\ -\infty & \text{si } n \text{ est impaire}\end{cases}$$

$\sqrt{+\infty}=+\infty$

3) خاصيات

a) إذا كانت للدالتين f و g نهاية منتهية في x_0 فإن الدوال $f+g$ و $f.g$ و αf تقبل نهاية منتهية في x_0

و $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)$

$\lim_{x\to x_0}(f(x).g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x).\lim_{x\to x_0}g(x)$

$\lim_{x\to x_0}(\alpha f(x))=\alpha.\lim_{x\to x_0}f(x)$

وإذا كانت $\lim_{x\to x_0}(g(x))\neq0$ فإن $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to x_0}f(x)}{\lim_{x\to x_0}g(x)}$

b) نهاية دالة حدودية في ∞ هي نهاية الحد الأكبر درجة .

c) نهاية دالة جذرية في ∞ هي نهاية خارج الحدين الأكبر درجة

4) بعض التقنيات لحساب نهاية دالة لا جذرية:

a) $\lim_{\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ ⟵ التعميل.

b) $\lim_{\infty}(f(x)+g(x))=+\infty-\infty$

*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من $f(x)$ و $g(x)$ متقابلين ⟵ المرافق.

*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من $f(x)$ و $g(x)$ غير متقابلين ⟵ التعميل.

c) $\lim_{x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a-a}{0}=\frac{0}{0} \quad (a\neq0)$ ⟵ المرافق.

d) $\lim_{x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0+0}{0}=\frac{0}{0} \quad (a\neq0)$ ⟵ التفكيك ثم ربما المرافق.

e) ملاحظة: $\sqrt{x^2}=|x|$ ؛ $\begin{cases}x=\sqrt{x^2}\,;x\geq0\\ x=-\sqrt{x^2}\,;x\leq0\end{cases}$

5) نهايات اعتيادية.

$\lim_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1 \qquad \lim_{x\to0}\frac{\tan(ax)}{ax}=1 \qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}=\frac{1}{2}$

6) النهايات و الترتيب.

a) إذا كان $|f(x)-l|\leq g(x)$ بجوار x_0 و $\lim_{x_0}g(x)=0$ فإن $\lim_{x_0}f(x)=l$

b) إذا كان $f(x)\leq g(x)$ بجوار x_0 و $\lim_{x_0}f(x)=+\infty$ فإن $\lim_{x_0}g(x)=+\infty$

c) إذا كان $f(x)\leq g(x)$ بجوار x_0 و $\lim_{x_0}g(x)=-\infty$ فإن $\lim_{x_0}f(x)=-\infty$

d) إذا كانت $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ بجوار x_0 و $\lim_{x_0}g(x)=\lim_{x_0}h(x)=l$ فإن $\lim_{x_0}f(x)=l$

II) الإتصال

1) تعريف

لكي نبين أن f متصلة في x_0 نقوم بحساب $\lim_{x_0}f(x)$

*) تكون f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كانت $\lim_{x_0}f(x)=f(x_0)$

*) تكون f متصلة على يمين x_0 إذا وفقط إذا كانت $\lim_{x_0^+}f(x)=f(x_0)$

*) تكون f متصلة على يسار x_0 إذا وفقط إذا كانت $\lim_{x_0^-}f(x)=f(x_0)$

*) تكون f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كانت متصلة على يمين و على يسار x_0 .

2) خاصيات

a) كل دالة حدودية متصلة على IR .

b) كل دالة جذرية متصلة على حيز تعريفها .

c) *) الدوال $x\to\sin x$ $x\to\cos x$ متصلة على IR .

*) الدال $x\to\tan x$ متصلة على حيز تعريفها .

d) إذا كانت f و g دالتين متصلتين على مجال I فإن الدوال $f+g$ و $f.g$ و αf متصلة على I .

وإذا كانت g لاتنعدم على I فإن $\frac{f}{g}$ متصلة على I .

ملاحظة

إذا كانت f دالة لا تحتوي على الجزء الصحيح وغير معرفة بأجزاء فإنها متصلة على حيز تعريفها لأنها مجموع وجداء دوال متصلة في غالب الأحيان.

3) التمديد بالاتصال

لتكن f دالة غير معرفةفي x_0 ، لكي نبين أن f تقبل تمديدا بالاتصال في x_0 نقوم بحساب $\lim_{x_0}f(x)$ إذا وجدنا $\lim_{x_0}f(x)=l\in\mathbb{R}$ فإن f تقبل تمديدا g بالاتصال في x_0 معرف بما يلي:

$$\begin{cases}g(x)=f(x) & ,x\neq x_0\\ g(x_0)=l\end{cases}$$

الأولى .س. ب.ع	دراسة الدوال	ح.بوعيون

I) الإشتقاق

1) تعاريف

a) تكون f قابلة للإشتقاق في x_0 إذا كان $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in IR$

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ونكتب $f'(x_0)=l$.

b) تكون f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 إذا وفقط إذا كان :

$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in IR$ ونكتب $f_d'(x_0)=l$.

c) تكون f قابلة للإشتقاق على يسار x_0 إذا وفقط إذا كان :

$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in IR$ ونكتب $f_g'(x_0)=l$.

d) تكون f قابلة للإشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت قابلة للإشتقاق على يمين x_0 و على يسار x_0 و $f_d'(x_0)=f_g'(x_0)$.

e) (* (f متصلة في x_0) $\Leftarrow$ (f قابلة للإشتقاق في x_0)

(* (f غير قابلة للإشتقاق في x_0) $\Leftarrow$ (f غير متصلة في x_0)

2) التأويل الهندسي :

a) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f يقبل مماسا (T) عند النقطة $M(x_0,f(x_0))$ معامله الموجه $f'(x_0)$ معادلته $(T):y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ وسيكون C_f على أحد الأشكال التالية :

b) إذا كانت f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 فإن C_f يقبل نصف مماس (T_1) عند النقطة $M(x_0,f(x_0))$ معامله الموجه $f_d'(x_0)$ معادلته $(T_1):y=f_d'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ وسيكون C_f على أحد الشكلين التاليين :

c) لدينا نتيجة مماثلة بالنسبة للإشتقاق على اليسار .

ملاحظة *) إذا كانت f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 و على يسار x_0 و $f_d'(x_0)\neq f_g'(x_0)$ فإن f غير قابلة للإشتقاق في x_0 إذن C_f لا يقبل مماسا في M لكنه يقبل نصفي مماس غير منطبقين وسيكون C_f على أحد الأشكال :

*) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f "لاينكسر" في M وإذا كانت f غير قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f "ينكسر" في M ويكون زاوية . ونقول إن M نقطة مزوات .

3) الدالة التآلفية المماسة لدالة .

a) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن الدالة $u(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في x_0

b) وإذا كان a جد قريب من x_0 فإن $u(a)$ قيمة مقربة ل $f(a)$ $(f(a)\approx u(a))$

4) اشتقاق دالة على مجال- الدالة المشتقة

a) نقول إن f قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I إذا كانت قابلة للإشتقاق في كل نقطة من I

b) نقول إن f قابلة للإشتقاق على المجال $[a,b]$ إذا كانت قابلة للإشتقاق على المجال $]a,b[$ وعلى يمين a وعلى يسار b .

c) إذا كانت f قابلة للإشتقاق علىI فإن الدالة $f':x\to f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة

d) إذا كانت f' قابلة للإشتقاق على مجال I فإن الدالة المشتقة للدالة f' تسمى المشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بـ f'' .

e) الدوال المشتقة لبعض الدوال الإعتيادية .

1) $(a)'=0$ 10) $(\frac{f}{g})'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$

2) $(x)'=1$ 11) $(\frac{1}{f})'=\frac{-f'}{f^2}$

3) $(ax)'=a$

12) $(f(ax+b))'=af'(ax+b)$

4) $(x^n)'=nx^{n-1}$ 13) $(\sin x)'=\cos x$

5) $(\frac{1}{x})'=\frac{-1}{x^2}$

14) $(\sin(ax+b))'=a\cos(ax+b)$

6) $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 15) $(\cos x)'=-\sin x$

7) $(f+g)'=f'+g'$

16) $(\cos(ax+b))'=-a\sin(ax+b)$

8) $(fg)'=f'g+g'f$ 17) $(\tan x)'=1+\tan^2 x$

9) $(af)'=af'$ 18) $(f^n)'=nf'f^{n-1}$

19) $(\tan(ax+b))'=a(1+\tan^2(ax+b))$

ملاحظة a) **لتكن f دالة معرفة على مجال I ولا تحتوي على $\sqrt{\ }$.**

لكي ندرس اشتقاق f في x_0 نتحقق هل f تغير صيغتها في x_0 ام لا ؟

*) إذا كنت f لا تغير صيغتها في x_0 نقوم بحساب $f'(x)$ ونعوض x بـ x_0

*) إذا كنت f تغير صيغتها في x_0 ندرس الإشتقاق باستعمال معدل التغير .

b) إذا كانت f' تنعدم في x_0 $(f'(x_0)=0)$ فإن C_f يقبل مماسا (T) عند النقطة $M(x_0,f(x_0))$ موازيا لمحور الأفاصيل .

5) تغيرات دالة

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I .

a) تكون f تزايدية على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I):f'(x)\geq 0$

b) تكون f تزايدية قطعا على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I):f'(x)\geq 0$ والأعداد التي تنعدم فيها f' معدودة .

c) تكون f تناقصية على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I):f'(x)\leq 0$

d) تكون f تناقصية قطعا على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I):f'(x)\leq 0$ والأعداد التي تنعدم فيها f' معدودة .

6) مطارف دالة .

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I و $x_0 \in I$. يكون للدالة f مطرافا نسبيا في x_0 إذا وفقط إذا كانت f' تنعدم وتغير الإشارة في x_0

II) التمثيل المبياني لدالة

1) التقعر

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I .

a) يكون C_f محدبا ( ) إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f''(x)\ge 0$

b) يكون C_f مقعرا ( ) إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f''(x)\le 0$

2) نقط انعطاف

a) لتكن f دالة قابلة للإشتقاق في x_0 و (T) المماس لـ C_f في $M(x_0, f(x_0))$ نقول إن M نقطة انعطاف إذاكان C_f يغير التقعر في M (C_f يخترق (T)) :

b) لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I و $x_0 \in I$ تكون النقطة $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف إذا وفقط إذا كان f'' تنعدم وتغير الإشارة في x_0 .

ملاحظة إذا كانت f' تنعدم ولاتغير الإشارة في x_0 فإن $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف ويكون المماس فيها موازيا لمحور الأفاصيل .

b) إذا أردنا تحديد جميع نقط انعطاف او دراسة التقعر نحسب $f''(x)$ وندرس إشارتها .

3) الفروع اللانهائية .

a) تعريف

نقول إن C_f يقبل فرعا لانهائيا إذا كانت لدينا إحدى الحالات التالية :

$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ أو $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$ أو $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

b) تصنيف الفروع اللانهائية :

1) إذا كان $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=\infty}$

فإن المستقيم $(\Delta): x=a$ مقارب ل C_f بجوار a .

2) إذا كان $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)=b}$

فإن المستقيم $(\Delta): y=a$ مقارب ل C_f بجوار ∞ .

3) إذا كان $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty}$ نقوم بحساب $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

a) إذا كان $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=\infty}$

فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار ∞ .

b) إذا كان $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=0}$

فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار ∞ .

c) إذا كان $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=a\neq 0}$ نقوم بحساب $\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)$.

i) إذا كان $\boxed{\lim(f(x)-ax)=b}$

فإن المستقيم $(\Delta): y=ax+b$ مقارب ل C_f بجوار ∞ .

ii) إذا كان $\boxed{\lim(f(x)-ax)=\infty}$

فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه $y=ax$ بجوار ∞ .

ملاحظة يكون المستقيم $(\Delta): y=ax+b$ مقاربا لـ C_f بجوار ∞ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ ونستعمل هذه الخاصية إذا كان السؤال هو بين أن $(\Delta): y=ax+b$ مقاربا لـ C_f أو إذا كانت $f(x)$ على شكل $f(x)=ax+b+h(x)$ مع $\lim_{x\to\infty} h(x)=0$.

4) محور تماثل- مركز تماثل

a) يكون المستقيم $(\Delta): x=a$ محور تماثل C_f إذا وفقط إذا كان :

*) لكل x من D_f لدينا $2a-x\in D_f$

*) $(\forall x\in D_f): f(2a-x)=f(x)$

b) تكون النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل C_f إذا وفقط إذا كان :

*) لكل x من D_f لدينا $2a-x\in D_f$

*) $(\forall x\in D_f): f(2a-x)=2b-f(x)$

III) الدوال الدورية

1) تعريف

a) نقول إن الدالة f دورية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم T بحيث $(\forall x\in D_f): f(x+T)=f(x)$ وكل عدد T يحقق هذا الشرط يسمى دور f

b) إذا كان T دورا للدالة f فإن كل عدد kT دور لـ f $(k\in\mathbb{Z})$

c) نختار عادة أصغر دور موجب قطعا .

ملاحظة a) لكي نبين أن f دورية يجب أولا ملاحظة الدور ثم نتحقق منه

b) *) $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ *) $\cos(x+\pi)=-\cos x$

*) $\sin(x+k\pi)=\sin x$ *) $\sin(x+\pi)=-\sin x$

*) $\tan(x+k\pi)=\tan x$

2) ادوار بعض الدوال الإعتيادية .

a) $f(x)=\cos(ax+b)$ أو $f(x)=\sin(ax+b)$ $T=\frac{2\pi}{|a|}$

b) $f(x)=\cos^2(ax+b)$ أو $f(x)=\sin^2(ax+b)$ $T=\frac{\pi}{|a|}$

c) $f(x)=\tan(ax+b)$ $T=\frac{\pi}{|a|}$

d) لكي نحدد دور $f+g$ نحدد أدوار كل من f و g و نأخذ أصغر دور مشترك .

3) رتابة دالة دورية .

لتكن f دالة دورية دورها T . إذا كانت f رتيبة على $[a,b]$ فإن f رتيبة على $[a+T,b+T]$ ولها نفس الرتابة .

4) منحنى دالة دورية

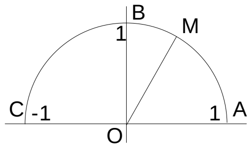
a) إذا كانت f دالة دورية دورها T فيكفي إنشاء C_f على مجال سعته T (عادت نأخذ $[0,T]\cap D_f$) ثم إزاحته بالإزاحة التي متجهتها $T\vec{i}$ ومن أجل إزاحة هذا الجزئ نبحث عن النقط المهمة التي تكونه ونزيحها بإضافة T إلى أفصولها والإحتفاظ بالأرتوب إذا أردنا الإزاحة نحو اليمين ونطرح T من الأفصول إذا أردنا الإزاحة نحو اليسار .

b) إذا كانت f دالة دورية دورها T وزوجية(أو فردية) فيكفي إنشاء C_f على $\left[0,\frac{t}{2}\right]\cap D_f$ ثم إنشاء المماثل بالنسبة لمحور الأراتيب (او أصل المعلم) ثم الإزاحة .

ج م ع	الحساب المثلثي ملخص الدرس	ح.بوعيون

I- وحدات قياس الزوايا

1) الرديان



ليكن $(o,\vec{i},\vec{j})$ معلما متعامدا ممنظما

ونعتبر النصف دائرة U التي مركزها o وشعاعها 1.

ونعتبر النقط $A(1,0),B(0,1),C(-1,0)$

a) لتكن M نقطة من U. وليكن α طول القوس $[\widehat{AM}]$

*) نقول إن قياس الزاوية $[A\hat{O}M]$ هو $\alpha\ rad$ (α رديان)

*) ونقول أيضا إن α هو قياس أي قوس يحصر هذه الزاوية.

b) مثال:

لنحدد قياس الزوايا $A\hat{O}B$ و $A\hat{O}C$

نعلم أن محيط الدائرة هو $2\pi R=2\pi.1=2\pi$

إذن محيط النصف دائرة هو $\frac{2\pi}{2}=\pi$

إذن طول القوس $[\widehat{AC}]$ هو π ومنه قياس الزاوية $[A\hat{O}C]$ هو π

وطول القوس $[\widehat{AB}]$ هو $\frac{\pi}{2}$ إذن قياس الزاوية $[A\hat{O}C]$ هو

πrad وطول القوس $[\widehat{AB}]$ هو $\frac{\pi}{2}$ إذن قياس الزاوية $[A\hat{O}B]$ هو

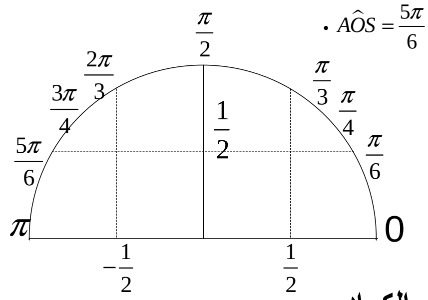
$\frac{\pi}{2}$.

c) تمرين

أنشئ على النصف دائرة u النقط S,R,Q,P,N,M بحيث:

$A\hat{O}M=\frac{\pi}{6}$ ، $A\hat{O}N=\frac{\pi}{4}$ ، $A\hat{O}P=\frac{\pi}{3}$ ، $A\hat{O}Q=\frac{2\pi}{3}$

$A\hat{O}R=\frac{3\pi}{4}$ ، $A\hat{O}S=\frac{5\pi}{6}$.



2) الدرجة و الكراد.

هناك وحدتان أخريين لقياس الزوايا هما الدرجة والكراد والعلاقة

التي تربط بينهما هي: $\frac{x}{180}=\frac{y}{200}=\frac{z}{\pi}$

حيث x هو القياس بالدرجة.

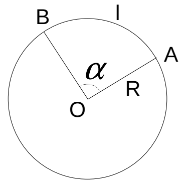
y هو القياس بالكراد.

z هو القياس بالرديان.

ملاحظة:

قياس الزاوية المستقيمة هي $\pi rad, 180^o, 200gra$.

3) مساحة قطاع دائري.



لتكن (C) دائرة مركزها o وشعاعها R

و B,A نقطتين من هذه الدائرة.

*) الجزء المخدش يسمى قطاعا دائريا.

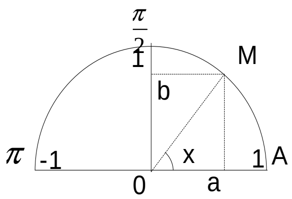
*) ليكن α قياس الزاوية $[A\hat{O}B]$ بالرديان

و l طول القوس $[\widehat{AB}]$ و s مساحة القطاع الدائري

لدينا $\boxed{l=\alpha R}$ و $\boxed{S=\frac{1}{2}\alpha R^2}$

II- النسب المثلثية لعدد حقيقي محصور بين 0 و π

1) تعريف:



ليكن x عدد حقيقي بحيث $0\le x\le\pi$ ولتكن النقطة M

من U بحيث يكون

طول القوس $[\widehat{AM}]$ هو x

يعني $A\hat{O}M=xrad$.

ليكن a أفصول M و b أرتوبها.

لدينا $\boxed{\cos x=a \qquad \sin x=b \qquad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \quad \left(x\neq\frac{\pi}{2}\right)}$

2) خاصيات:

a)

*) $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

*) $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ لكل $x\neq\frac{\pi}{2}$

*) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ لكل $x\neq\frac{\pi}{2}$

b) $-1\le\cos x\le1$ و $0\le\sin x\le1$

c) *) $\sin x\ge0$ لكل $0\le x\le\pi$

*) إذا كان $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ فإن $\cos x\ge0$

*) إذا كان $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$ فإن $\cos x\ge0$

*) إشارة $\tan x$ هي بالضبط إشارة $\cos x$

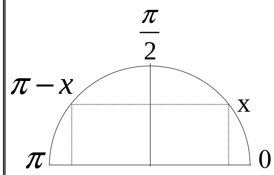
d)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
cosx		+	0	−	

x	0		π
sinx	0	+	0

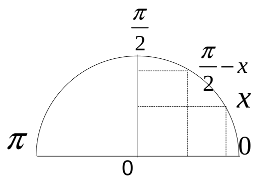
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
tanx		+	‖	−	

3) العلاقة بين النسب المثلثية للعددين x و $\pi - x$



$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad (a$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x \quad (b$$
$$\tan(\pi - x) = -\tan x \quad (c$$

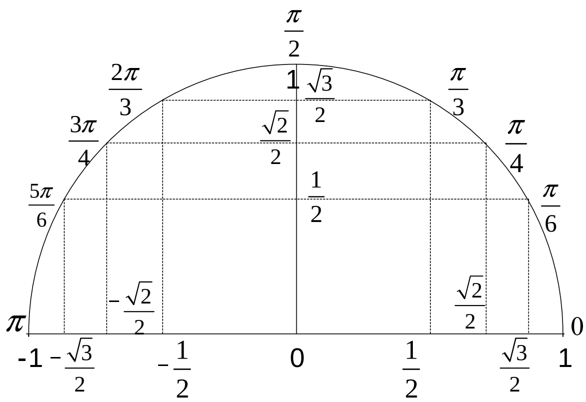
4) العلاقة بين النسب المثلثية للعددين x و $\frac{\pi}{2} - x$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad (a$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad (b$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x} \quad (c$$

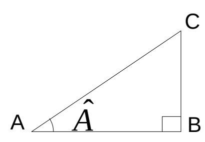
5) جدول النسب الإعتيادية

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



6) العلاقات المترية في مثلث قائم الزاوية

a) ليكن (ABC) مثلثا قائم الزاوية في B

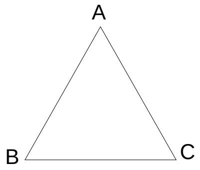


$$Cos\hat{A} = \frac{AB}{AC}$$
$$Tan\hat{A} = \frac{BC}{AB}$$
$$Sin\hat{A} = \frac{BC}{AC}$$

b) علاقة $Sinus$ في المثلث

ليكن (ABC) مثلثا و

R شعاع الدائرة المحيطة به

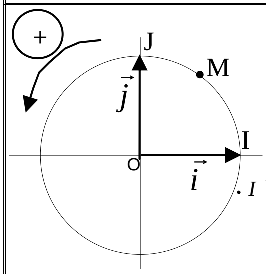


لدينا

$$\frac{AB}{Sin\hat{C}} = \frac{AC}{Sin\hat{B}} = \frac{BC}{Sin\hat{A}} = 2R$$

الأولى ب ع رياضية	الحساب المثلثي ملخص الدرس	ح.بوعيون

I– الأفاصيل المنحنية



1) *) ليكن $(o,\vec{i},\vec{j})$ م م م. ولتكن U الدائرة التي مركزها o وشعاعها 1

*) نختار المنحى المعاكس لعقربي الساعة كمنحى موجب. ولتكن $I(1,0)$.

*) الدائرة U تسمى الدائرة المثلثية التي أصلها I .

2) لتكن M نقطة من U . للحصول على أفصول منحني لـــ M .

نختار قوسا تؤدي من I نحو M ونقيس طولها.

ليكن α طول هذه القوس.

*) إذا كان الانتقال من I نحو M يتم حسب المنحى الموجب فإن α أفصول منحني للنقطة M .

*) إذا كان الانتقال من I نحو M يتم حسب المنحى السالب فإن $-\alpha$ أفصول منحني للنقطة M .

3) للحصول على جميع الأفاصيل المنحنية لنقطة M يكفي أن نتعرف على أحد هذه الأفاصيل فقط (عادة نختار أقصر قوس تؤدي من I إلى M).
وإذا كان α أحد هذه الأفاصيل فإن الأفاصيل المنحنية للنقطة M هي الأعداد التي تكتب على شكل $\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

4) يكون العددان α و β أفصولين منحنين لنفس النقطة إذا وفقط إذا كان $\alpha-\beta=2k\pi$ يعني $\alpha=\beta-2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ونكتب $\alpha\equiv\beta[2\pi]$.

ملاحظة: 1)

$$\alpha\equiv\beta[2\pi]\Leftrightarrow\alpha=\beta+2k\pi$$
$$\Leftrightarrow\alpha-\beta=2k\pi$$

(α و β أفصولين منحنين لنفس النقطة) $\Leftrightarrow$

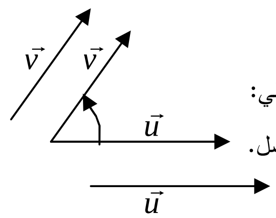
2) *) $\alpha\equiv\alpha+2n\pi\quad[2\pi]$

*) $\alpha\equiv\beta\,[2\pi]\Leftrightarrow\alpha\equiv\beta+2n\pi\ [2\pi]$

5) من بين جميع الأفاصيل المنحنية لنقطة M يوجد أفصول منحني وحيد α_0 يحقق $-\pi\langle\alpha_0\langle\pi$. α_0 يسمى الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M
(ونحصل عليه باختيار أقصر قوس تؤدي من I نحو M).

6) نعتبر الأعداد $\alpha+\frac{2k\pi}{n}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.
عدد النقط التي أفاصيلها المنحنية هي هذه الأعداد هو n . ومن أجل إنشائها يكفي تعويض k ب n قيمة متتابعة. عادة نعوض k بالقيم $0,1,2,....,(n-1)$
وهذه النقط تكون مضلعا منتظما محاطا بالدائرة U .

II– قياس الزوايا الموجهة



1) لتكن $\vec{u},\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين.
من أجل تحديد قياسات الزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نتبع ما يلي:

*) نزيح المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إلى نفس الأصل.

*) المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تحددان زاويتين هندسيتين نختار إحداهما
(عادة نختار الزاوية الحادة) ونحدد قياسها الهندسي بالرديان. ليكن α هذا القياس.

⟵) إذا كان التحرك من $\vec{u}$ نحو $\vec{v}$ داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى الموجب فإن كل عدد على شكل $\alpha+2k\pi$ هو قياس لهذه الزاوية ونكتب
$\overline{(\vec{u},\vec{v})}=\alpha+2k\pi$ أو $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv\alpha[2\pi]$.

⟵) إذا كان التحرك من $\vec{u}$ نحو $\vec{v}$ داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى الموجب فإن كل عدد على شكل $-\alpha+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ هو قياس لهذه الزاوية.
ونكتب $\overline{(\vec{u},\vec{v})}=-\alpha+2k\pi$ أو $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv-\alpha[2\pi]$.

2) خاصيات.

a) من بين قياسات $\overline{(\vec{u},\vec{v})}$ يوجد قياس وحيد يحقق $-\pi\langle\alpha_0\le\pi$ ويسمى القياس الرئيسي.

b) $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv\overline{(\vec{u},\vec{w})}+\overline{(\vec{w},\vec{v})}\ [2\pi]$ (علاقة شال).

c) $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv-\overline{(\vec{v},\vec{u})}\ \ [2\pi]$.

d) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين ولهما نفس المنحى فإن $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv0[2\pi]$

e) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين ولهما منحيان متعاكسان فإن $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv\pi[2\pi]$

f) يكون α و β قياسين لنفس الزاوية إذا وفقط إذا كان $\alpha-\beta=2k\pi$ يعني $\alpha\equiv\beta[2\pi]$.

ملاحظة:

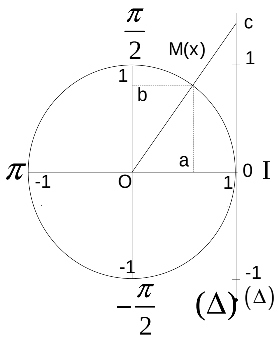
1) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين إذا وفقط إذا كان حاملاهما متوازيين.

2) المتجهتين $\vec{u}$ و $\alpha\vec{u}$ (مع $\alpha\rangle0$) مستقيمان ولهما نفس المعنى.

3) المتجهتين $\vec{u}$ و $\alpha\vec{u}$ (مع $\alpha\langle0$) مستقيمان ولهما منحيان متعاكسان.

III– الدوال المثلثية

1)تعريف



لتكن U الدائرة المثلثية التي أصلها I .

وليكن (Δ) المحور المماس ل U في I .

ندرج المحور (Δ) بنفس وحدة معلم وأصله I .

*) ليكن x من $\mathbb{R}$ و M النقطة التي أفصولها المنحني هو x

ليكن a أفصول ل M و b

ارتوب M يعني $M(a,b)$.

c أفصول تقاطع (OM) مع (Δ) على المحور (Δ)

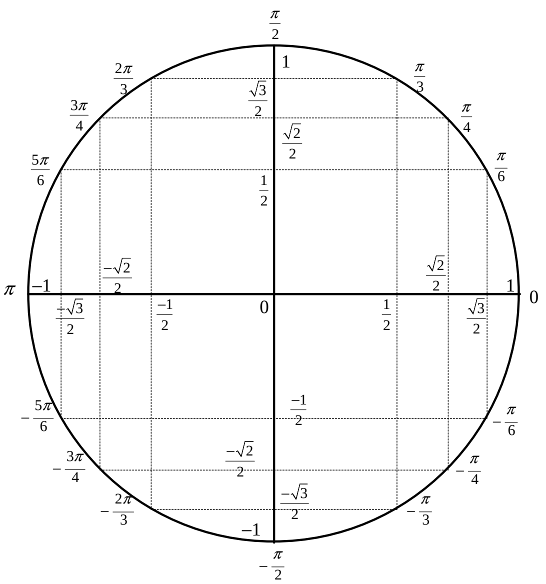
لدينا

$$\cos x=a\qquad\sin x=b\qquad\tan x=c$$

2) خاصيات

a)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	×	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



b) تكون $\tan(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} x\neq \frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x\neq -\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$ يعني $x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi$

c) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ $\quad \cos^2 x+\sin^2 x=1$ $\quad 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

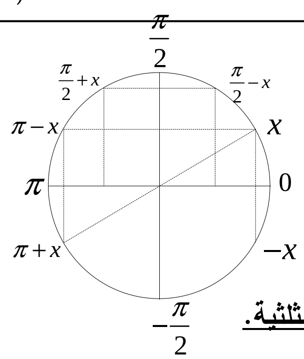
d) $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ $\quad \sin(x+2k\pi)=\sin x$ $\quad \tan(x+k\pi)=\tan x$

e) $\cos(-x)=\cos x$ $\quad \sin(-x)=-\sin x$ $\quad \tan(-x)=-\tan x$

f)
$$\cos(\pi-x)=-\cos x \qquad \cos(\pi+x)=-\cos x$$
$$\sin(\pi-x)=\sin x \qquad \sin(\pi+x)=-\sin x$$
$$\tan(\pi-x)=-\tan x \qquad \tan(\pi+x)=\tan x$$

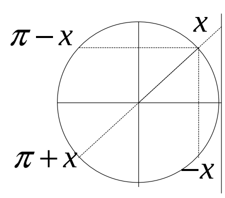
g)
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$$

h) $(\forall x\in\mathbb{R}): -1\leq \cos x\leq 1 \quad ; \quad -1\leq \sin x\leq 1$



3) المعادلات المثلثية.

a)
$$\cos x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi$$
$$\cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \qquad \cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ x=-\alpha+2k\pi \end{cases}$$
$$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$



b)
$$\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$
$$\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$
$$\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$$
$$\sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \end{cases}$$

c) $\tan x=\tan\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi$

ملاحظات.

1) إذا كان $\alpha\notin[-1,1]$ فإن المعادلتين $\cos x=a$ و $\sin x=a$ ليس لهما حل.

2) تكون المعادلة $\tan(u(x))=a$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} u(x) \text{ معرفة} \\ u(x)\neq \frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}$

3)
$$-\cos\alpha=\cos(\pi-\alpha) \qquad -\sin\alpha=\sin(-\alpha) \qquad -\tan\alpha=\tan(-\alpha)$$
$$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \qquad \cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

4) المتراجحات المثلثية. (انظر التمارين)

ملاحظة

1) نضع $f(x)=a\cos(u(x))+b$ أو $f(x)=a\sin(u(x))+b$

* إذا كان a و b غيرمتقابلين وغير متساويين فإن $f(x)$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x)=0$

* إذا كان a و b متقابلين أو متساويين فإن $f(x)$ لها إشارة ثابتة

2) نضع $f(x): a\tan(u(x))+b$ $\quad f(x)$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x)=0$ وفي الأعداد التي تكون غير معرفة فيها.

5) صيغ التحويل

a)
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$
$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$
$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b}$$
$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\cdot\tan b}$$

b)
$$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$$
$$\sin(2a)=2\sin a\cos a$$
$$\tan(2a)=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

c)
$$\cos^2 a=\frac{1+\cos(2a)}{2}$$
$$\sin^2 a=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$
$$\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin(2a)$$

d)
$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

e)
$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$

f) نضع $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$: لدينا .

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}$$

g) من أجل تحويل $f(x)=a\cos x+b\sin x$ نتبع ما يلي:

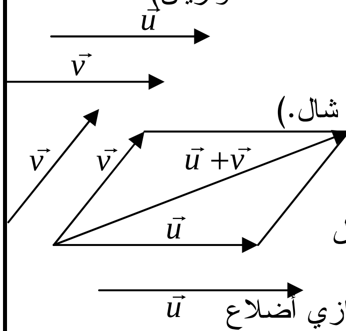
$$f(x)=a\cos x+b\sin x$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$$

مع $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ج م ع	الحساب المتجهي- المرجح ملخص الدرس	ح.بوعيون

A) الحساب المتجهي

1) تكون متجهتان $\vec{u}$ و$\vec{v}$ متساويتين إذا وفقط إذا كان لهما نفس الاتجاه (يعني حاملاهما متوازيان) ونفس المنحنى ونفس المنظم.



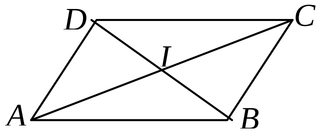
2) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (علاقة شال).

4) $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ تكافئ $A=B$.

5) من أجل تحديد $\vec{u}+\vec{v}$ نزيح $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إلى نفس الأصل ونكون متوازي أضلاع.

6) يكون الرباعي $(ABCD)$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا تحققت إحدى الشروط التالية:



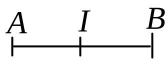
a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

b) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

d) القطران $[AC]$ و $[BD]$ لهما نفس المنتصف.

7) I منتصف القطعة $[AB]$ يعني



$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ (* $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$ (* $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (*

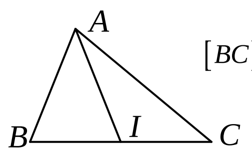
$\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ (* $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ (*

ملاحظة:

a) إذا كان I منتصف $[AB]$ يستحسن استعمال $\boxed{\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$

b) لكي نبين أن I منتصف $[AB]$ يستحسن أن نبين أن $\boxed{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}}$

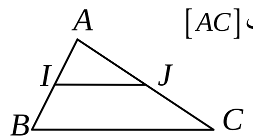
8) ليكن (ABC) مثلثا و I منتصف $[BC]$



لدينا $\boxed{\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)}$.

9) ليكن (ABC) مثلثا.

I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AC]$



لدينا $\boxed{\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$

10) a) تكون $\vec{u}$ و$\vec{v}$ مستقيمين إذا وفقط إذا كان حاملاهما متوازيين.

b) تكون $\vec{u}$ و$\vec{v}$ مستقيمين إذا وفقط إذا كان $\vec{v}=\alpha\vec{u}$ أو $\vec{u}=\alpha\vec{v}$.

c) تكون النقط A وB وC مستقيمية إذا وفقط إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AC}$ مستقيميتين يعني $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AC}$ أو $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$

d) يكون (AB) و (CD) متوازيين إذا وفقط إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{CD}$ مستقيميتين.

ملاحظة:

a) لكي نبين أن متجهتين $\overrightarrow{IJ}$ و$\overrightarrow{IK}$ تحققان علاقة ما (مثلا $\overrightarrow{IJ}=\alpha\overrightarrow{IK}$ أو $\alpha\overrightarrow{IJ}+\beta\overrightarrow{IK}=\vec{0}$ أو ...).

نقوم بحساب $\overrightarrow{IJ}$ و$\overrightarrow{IK}$ بدلالة متجهتين غير مستقيميتين مكونتين من النقط الأصلية $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AC}$ مثلا.

ونجد مثلا $\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{IK}=6\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ ومنه نستخ أن $3\overrightarrow{IJ}=6\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{IK}$ إذن $\overrightarrow{IK}=3\overrightarrow{IJ}$.

b) ليكن (ABC) مثلثا و M نقطة بحيث $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}$ يستحسن تغيير تعريف النقط M وجعلها من جهة واحدة كما يلي:

$\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}$ يعني $\overrightarrow{MA}=3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)$ يعني $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{AB}$

يعني $-2\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{AB}$ يعني $2\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$ إذن $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

B) المرجح

نسمي نقطة متزنة كل زوج (A,α) حيث A نقطة من المستوى و α عدد حقيقي.

I) مرجح نقطتين.

1) **تعريف** لتكن (A,α) و (B,β) نقطتين متزنتين.

إذا كان $\alpha+\beta\neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G تحقق

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}}$$

النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β) أو مرجح النظمة المتزنة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$

2) **خاصية مميزة:**

تكون النقطة G مرجح النظمة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ إذا وفقط إذا كان

$$\boxed{\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\right)}$$ لكل θ من المستوى P .

ملاحظة:

a) إذا أردنا أن نبين أن G مرجح النظمة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ يستحسن استعمال التعريف ونبين أن $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$. ولهذا نتبع ما يلي:

$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}$ ثم نحسب $\overrightarrow{GA}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AC}$ ونعوض.

b) إذا كان G مرجح النظمة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ وأردنا حساب $\overrightarrow{AG}$ أو $\overrightarrow{BG}$ أو $\overrightarrow{CG}$ أو ... يستحسن استعمال الخاصية المميزة.

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\right)$ لكل O من P ثم نعوض O ب A أو B أو C...

3) إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ فإن G مرجح $\{(A,k\alpha),(B,k\beta)\}$ لكل k من $\mathbb{R}^*$. وهذا يعني أن المرجح لا يتغير إذا ضربنا الأوزان أو قسمناها على عدد غير منعدم.

(4) ليكن G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\alpha)\}$ مع $(\alpha \neq 0)$ G يسمى مركز ثقل A و B.

لدينا من خلال ما سبق G مرجح $\{(A,1)(B,1)\}$ إذن $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$ لكل θ من P ومن أجل $O=A$ نجد $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ إذن G منتصف $[AB]$

خاصية: مرجح النظمة $\{(A,1)(B,1)\}$ هو مرجح $\{(A,1)(B,1)\}$ وهو منتصف $[AB]$.

ملاحظة: إذا أردنا أن نبين أن I منتصف $[AB]$ نبين أن I مرجح $\{(A,1)(B,1)\}$ يعني $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

(5) ليكن G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ لدينا $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\right)$ لكل O من P. ومن أجل $O=A$ نجد $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ إذن $G\in(AB)$

خاصية: إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ فإن $G\in(AB)$ ولدينا $\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}$.

ملاحظة: إذا أردنا إنشاء المرجح G نقوم بحساب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ أو $\overrightarrow{BG}$ بدلالة $\overrightarrow{BA}$.

(6) **إحداثيات المرجح:**

ليكن G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ إحداثيات G هي

$$\begin{cases} x_G=\frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha x_A+\beta x_B) \\ y_G=\frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha y_A+\beta y_B) \end{cases}$$

II) مرجح ثلاث نقط.

(1) **تعريف:** لتكن (A,α) (B,β) (C,γ) ثلاث نقط متزنة.

إذا كان $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G تحقق: $\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$ النقطة G تسمى مرجح النقط (A,α) و (B,β) و (C,γ) أو مرجح النظمة المتزنة $\{(A,\alpha)\ (B,\beta)\ (C,\gamma)\}$.

(2) **خاصية مميزة:**

تكون النقطة G مرجح النظمة $\{(A,\alpha)\ (B,\beta)\ (C,\gamma)\}$ إذا وفقط إذا كان: $\boxed{\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}\right)}$ لكل O من المستوى P

ملاحظة: نفس ملاحظة I).

(3) المرجح لا يتغير إذا ضربنا أو قسمنا الأوزان على نفس عدد غير منعدم.

(4) ليكن G مرجح $\{(A,\alpha)(B,\alpha)(C,\alpha)\}$ مع $(\alpha\neq 0)$.

لدينا G مرجح $\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$. المرجح G يسمى في هذه الحالة مركز ثقل النقط A,B,C أو مركز ثقل المثلث (ABC).

خاصة: مرجح $\{(A,\alpha)(B,\alpha)(C,\alpha)\}$ هو مرجح $\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$ وهو مركز ثقل (ABC).

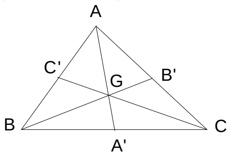
(5) **إحداثيات المرجح.**

ليكن G مرجح $\{(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)\}$ إحداثيات G هي

$$\begin{cases} x_G=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C) \\ y_G=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C) \end{cases}.$$

(6) **التجميعية.**

إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ و G_1 مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ فإن G مرجح $\{(G_1,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}$ وهذا يعني أن مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع وزني تلك النقطتين.



(7) ليكن (ABC) مثلثا مركز ثقله G

G هو مرجح $\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$

A' و B' و C' منتصفات $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي المتوسطات (AA') و (BB') و (CC') تتلاقى في G.

ولدينا $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$

III) مرجح أربع نقط.

نعرف بنفس الطريقة مرجح أربع نقط وسيكون لدينا نفس الخاصيات السابقة. هناك فرق فقط في التجميعية حيث تصبح:

(7) مرجح أربع نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع الوزنين أو عوضنا كل نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع الوزنين، أو عوضنا ثلاث نقط بمرجحها متزن بمجموع الأوزان.